Towards Mathematical Sciences

Vol. 2, No. 1, Spring and Summer 2022, pp. 31–79

DOI.10.22067/tmsj.2021.41431

Expository Article



https://tmsj.um.ac.ir



INVESTIGATING ANALYTICAL CONCEPTS IN HIGH SCHOOL MATHEMATICS BOOKS

MOHSEN KIAN[1]

[1]Department of Mathematics, University of Bojnord, Bojnord, Iran
kian@ub.ac.ir

Abstract. In this paper, we investigate analytical concepts in high school mathematics books for mathematics students. We discuss some weak points and strong points of the books. Also, we suggest some analytical concepts which by many authors are necessary for students to improve their critical thinking.

2020 Mathematics Subject Classification. 97A30, 97U20
Keywords. Analytical concepts, high school books, limit, continuity, derivative, integral
Date: Rceived 23-10-2021 Revised 11-11-2021 Accepted 26-11-2021
Available Online 7-12-2021.

به سوی علوم ریاضی

دوره ۲، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۴۰۱، صص. ۷۹-۳۱

DOI. 10.22067/tmsj.2021.41431

مقاله علمی-ترویجی

https://tmsj.um.ac.ir

نقد و بررسی مفاهیم آنالیزی کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه

محسن کیان[1]

[1] گروه ریاضی، دانشگاه بجنورد

kian@ub.ac.ir

چکیده. در این مقاله، به نقد و بررسی مفاهیم آنالیزي درکتاب‌هاي ریاضی دوره متوسطه براي رشته ریاضی و فیزیک پرداخته شده است. ضمن بررسی این مفاهیم که هم اکنون درکتاب‌هاي ریاضی دوره متوسطه تدریس می‌شوند، سعی می‌کنیم پاره‌ای از نقاط ضعف و قوت آنها را بیان نماییم. به‌ویژه تلاش می‌کنیم محتواي جدید آنالیز ریاضی، که به زعم پژوهشگران براي دانش‌آموزان رشته ریاضی براي ورود به رشته‌هاي متنوع دانشگاهی و نیز گسترش تفکر انتقادي آنها لازم است، براي این کتاب‌ها پیشنهاد دهیم.

۰. پیش‌گفتار

کتاب‌هاي درسی رشته ریاضی دوره متوسطه در طی سالیان گذشته، قبل و بعد از انقلاب ۱۳۵۷ بارها مورد بازبینی و اصلاح قرارگرفته‌اند و همواره مدرسین و متخصصین حوزه آموزش ریاضی نکات و پیامدهاي مثبت و منفی این تغییرات را بیان نموده‌اند. پیامدهاي ناشی از تغییر مواد درسی ریاضی در دوره متوسطه به طور مستقیم بر علاقه دانش آموزان به این رشته و همچنین توان علمی آنان در دوره‌هاي دانشگاهی تاثیری غیرقابل انکار دارند.

نظام‌های آموزشی نیز طی سالیان گذشته دستخوش تغییر و تحول شده‌اند. نظام آموزش مدارس قبل از سال ۱۳۴۶ به دو دوره ۶ سال ابتدایی و ۶ سال متوسطه تقسیم شده بود. پس از آن نظام آموزشی تبدیل به نظامی

2020 Mathematics Subject Classification. 97A30, 97U20

کلید واژگان. مفاهیم آنالیزی، کتاب‌های دوره متوسطه، رشته ریاضی و فیزیک، حد و پیوستگی، مشتق، انتگرال .

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۸/۱ بازنگری ۱۴۰۰/۸/۲۰ پذیرش ۱۴۰۰/۹/۵ انتشار برخط ۱۴۰۰/۹/۱۶

نحوه ارجاع به این مقاله: م.کیان، نقد و بررسی مفاهیم آنالیزی کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه، به سوی علوم ریاضی، ۲ (۱۴۰۱)، شماره ۱، ۷۹-۳۱ .

موسوم به ۵-۳-۴ گردید، یعنی ۵ سال ابتدایی، سه سال راهنمایی و چهار سال متوسطه. این سیستم آموزشی تا سال ۱۳۷۰ در مدارس کشور اجرا می‌شد تا جایی که تصمیمی مبنی بر جدا کردن سال آخر متوسطه به عنوان دوره پیش‌دانشگاهی گرفته شد. از این رو، از سال ۱۳۷۰ به بعد، نظام آموزشی موسوم به ۵-۳-۳-۱ اجرایی شد، یعنی ۵ سال ابتدایی، سه سال راهنمایی و سه سال متوسطه و یک سال پیش دانشگاهی. در سال‌های اول بکارگیری این نظام آموزشی، ورود به دوره پیش دانشگاهی مستلزم گذراندن امتحان ورودی بود اما پس از مدتی این امتحان ورودی برداشته شد. در آخرین تغییرات، نظام آموزشی در سال تحصیلی ۱۳۹۲ از سیستم ۵-۳-۳-۱ به ۶-۳-۳ تغییر یافت، یعنی دوره پیش دانشگاهی حذف شد و آموزش به ۶ سال دوره ابتدایی، ۳ سال دوره متوسطه اول و ۳ سال دوره متوسطه دوم تقسیم بندی شد. برای یافتن توصیف و تحلیل بیشتر نظام‌های مختلف آموزشی کشور به [۱۰، ۱۳] مراجعه نمایید.

در سال‌های اخیر، افت سطح علمی دانشجویان نو ورود به طور کلی در همه رشته‌های دانشگاهی و به طور خاص در رشته ریاضی کاملا مشهود است ([۱۱] را ببینید). ضعف دانشجویان در مفاهیم پایه‌ای ریاضیات که در دوره متوسطه آموزش داده می‌شوند، و لازمه ادامه تحصیل فرد در دوره کارشناسی تقریبا تمامی رشته‌های مهندسی و علوم پایه هستند، تبدیل به مشکلی جدی برای مدرسین و دانشجویان شده است. در برخی موارد عدم تناسب مفاد آموزشی در دوره متوسطه با دوره کارشناسی نیز به چشم می‌خورد که با تغییر و بازنگری کتاب های دوره متوسطه، گاه به مشکل جدی‌تری تبدیل می‌شود.

در این طرح، به بررسی مفاهیم آنالیزی در کتاب‌های ریاضی دوره متوسطه رشته ریاضی و فیزیک پرداخته شده است و نقاط ضعف و قوت این مفاهیم با ذکر دلایل مشخص توصیف شده‌اند.

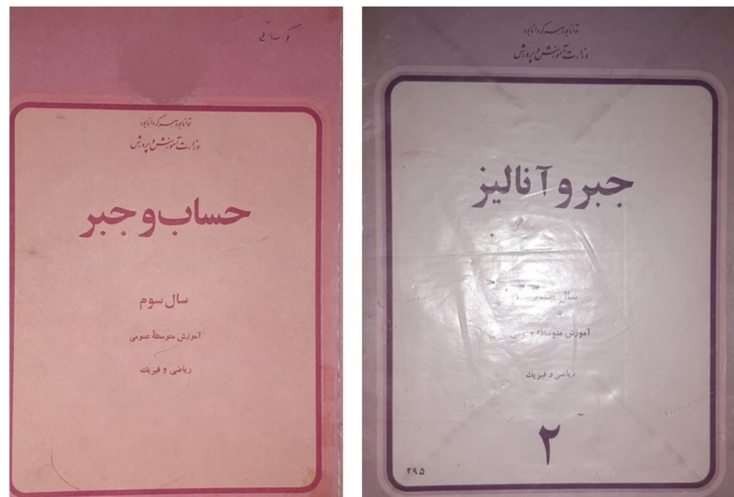
برای بررسی این مفاهیم، چندین کتاب مورد بررسی و مقایسه قرار گرفته‌اند. در این بررسی، برای پرهیز از بکار بردن واژه‌های ''نظام قدیم'' یا ''نظام جدید''، برای ارجاع به هر کتاب از سال چاپ آن استفاده خواهیم کرد. در مورد کتاب‌های مورد بررسی، یعنی کتاب ''حسابان یک- پایه سوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک'' که در فصل ۳ مورد بررسی قرار گرفته است و کتاب ''حسابان دو- پایه چهارم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک'' که در فصل ۴ مورد بررسی قرار گرفته است، صرفاً واژه کتاب را مورد استفاده قرار خواهیم داد:

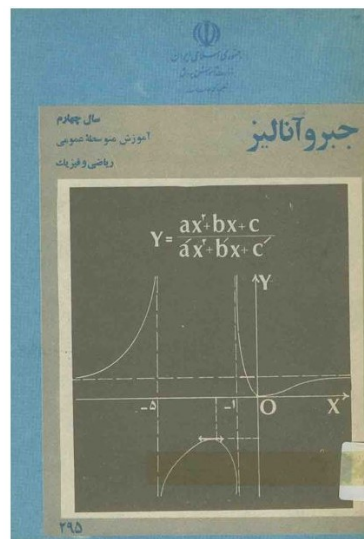
کتاب حسابان یک- پایه سوم دوره دوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک
کتاب حسابان دو- پایه چهارم دوره دوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک
کتاب ریاضی ۲- پایه یازدهم دوره دوم متوسطه رشته علوم تجربی
کتاب ریاضی ۳- پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه رشته علوم تجربی
کتاب حسابان- سال سوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک چاپ ۱۳۹۲
کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی و فیزیک چاپ ۱۳۹۴

به علاوه، در این بررسی از محتوای کتاب‌های ''حساب و جبر'' سال سوم دوره متوسطه و ''جبر و آنالیز'' سال چهارم دوره متوسطه که چاپ قبل از انقلاب هستند و در ادامه آنها را کتاب‌های سال‌های دور خطاب می‌کنیم، استفاده خواهیم کرد.

همچنین، کتاب ''جبر و آنالیز'' سال چهارم دوره متوسطه چاپ سال ۱۳۶۰ نیز در این مطالعه استفاده شده است.

تاکید می‌کنیم که مفاهیم آنالیزی به طور کلی شامل موضوعات حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال است که هر کدام از این موضوعات شامل زیربخش‌های زیادی هستند. این مفاهیم به طور مشخص در دو کتاب حسابان یک پایه یازدهم و حسابان دو پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه گنجانده شده‌اند. در بررسی این دو کتاب سعی کرده‌ایم نگاه انتقادی داشته و برای اصلاح موارد پیشنهادهایی ارائه دهیم. با این وجود، محتوای بسیاری از دروس به خوبی تهیه و گنجانده شده است و در این طرح این نقاط مثبت نیز بررسی شده‌اند.





به طور کلی این بررسی به سه شیوه انجام شده است. اول: نکات مثبت و محتوای مناسب آورده شده در کتاب، دوم: نقد موارد نامناسب و پیشنهاد برای اصلاح و یا حذف آنها و سوم: پیشنهاد گنجاندن محتوای آموزشی جدید.

۲. کتاب حسابان یک، پایه یازدهم

درکتاب مورد بررسی، همانند سایر کتاب‌های ویرایش جدید در رشته ریاضی و فیزیک، تقریبا تمامی گزاره‌ها و روابط بدون برهان آورده شده‌اند. گرچه حذف برخی از برهان‌های طولانی، که در کتاب‌های چاپ ادوار گذشته گنجانده شده بود، به روان شدن سیر آموزش محتوا کمک کرده است، اما در برخی از موارد که برهان‌ها جنبه ساختاری داشته و به دانش آموز در فهم بیشتر گزاره‌ها کمک می‌کرده است نیز از این کتاب‌ها حذف شده‌اند. شاید بتوان گفت که برجسته‌ترین نقطه قوت کتاب‌های ویرایش حاضر، تفکیک و دسته بندی مناسب محتوا می‌باشد.

۱.۲ حد در شروع آموزش مفهوم حد، در کتاب دوره جدید، توضیحات و مثال‌های مناسبی آورده شده است. در فعالیت صفحه ۱۱۴ کتاب (شکل ۱)، مثال مناسبی آورده شده است که می‌تواند به دانش‌آموز در فهم و درک مفهوم حد کمک کند.

شکل ۱: فعالیت صفحه ۱۱۴ کتاب حسابان ۱

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.

…

۱ با افزایش اضلاع چندضلعی های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می شود؟

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر π=۳/۱۴۱۵۹ در نظر بگیریم و مساحت nضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n\in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد :

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد... که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی های منتظم درون دایره (محاطی) را به هر اندازه که بخواهیم، می توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

مثال صفحه ۱۱۶ (شکل ۲) اولین مثالی است که دانش‌آموز با حد یک تابع مواجه می‌شود. در این مثال سعی شده است حد تابع در یک نقطه با محاسبه مقادیر تابع در نقاط نزدیک آن به دانش‌آموز نشان داده شود. گرچه هنوز مفاهیم حد چپ و حد راست بیان نشده است، اما در جدول محاسبه مقادیر تابع به‌طور غیرمستقیم اشاره می‌شود که برای نزدیک شدن به نقطه مورد نظر می‌توان با مقادیر کمتر یا با مقادیر بیشتر از آن نقطه به آن نزدیک شد:

شکل ۲: مثال صفحه ۱۱۶ کتاب حسابان ۱

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود | x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\rightarrow$	۲	$\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود | $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

در تعریف حد یک تابع در نقطه‌ای مانند a که در صفحه ۱۱۹ آورده شده است (شکل ۳)، از عبارت ”به جز احتمالا در خود a“ استفاده شده است.

شکل ۳: تعریف حد یک تابع صفحه ۱۱۹

تعریف حد یک تابع

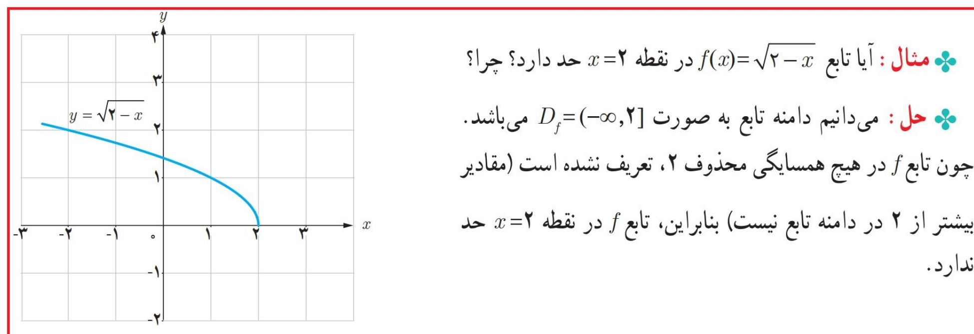
فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim_{x\to a} f(x) = L$

عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

همان‌گونه که در توضیحات کار در کلاس صفحه ۱۱۸ آورده شده است، پیشنهاد می‌شود دبیر در توضیح عبارت فوق بار دیگر تاکید نماید که برای تعریف حد یک تابع در نقطه‌ای مانند a، نیاز است که تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. به بیان دیگر، دانش آموز باید درک کند که منظور از اصطلاح ''به جز احتمالا در خود a'' این است که برای وجود حد تابع در یک نقطه مانند a، ممکن است تابع در نقطه a تعریف شده باشد و یا نباشد. این مطلب به طور مناسبی در مثال صفحه ۱۲۰ (شکل ۴) آورده شده است:

شکل ۴: مثال صفحه ۱۲۰


مثال : آیا تابع $f(x)=\sqrt{2-x}$ در نقطه $x=2$ حد دارد؟ چرا؟

حل : می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f=(-\infty,2]$ می‌باشد.
چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه $x=2$ حد ندارد.

در این مثال به روشنی بیان می‌شود که چون تابع در هیچ همسایگی محذوفی از نقطه ۲ تعریف شده نیست، پس حد تابع در نقطه ۲ وجود ندارد.

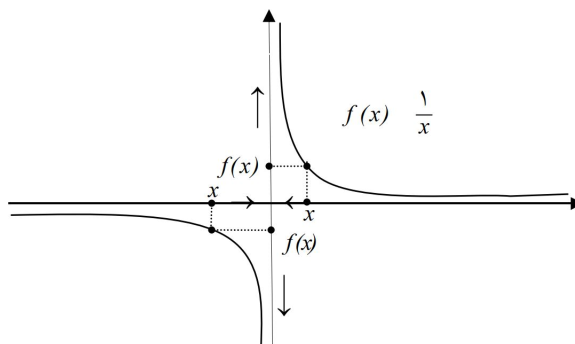
به نظر می‌رسد پس از آوردن مثال‌هایی که در آنها دانش آموز به کمک نمودار و یا جدول مقادیر به محاسبه حد توابع می‌پردازد، بهتر است مثال یا مثال‌هایی آورده شود که در آنها حد تابع در نقطه داده شده وجود ندارد. به‌طور مشخص، مثال صفحه ۱۲۰ تنها مثال از این دست در این فصل می‌باشد. با این حال در این مثال شرایط تعریف حد وجود ندارد.

در کتاب حسابان سال ۱۳۹۲، این موضوع با آوردن یک مثال به روشنی توضیح داده شده است.

پیشنهاد می‌شود مثالی از یک تابع آورده شود که شرایط تعریف حد وجود داشته ولی تابع در آن نقطه دارای حد نباشد. تاکید می‌کنیم که می‌توان همانند همه مثال‌های این فصل، از نمودار و یا جدول مقادیر برای اینکار استفاده کرد. یک مثال پیشنهادی به‌صورت زیر است:

شکل ۵: فعالیت ۲ صفحه ۱۳۶ کتاب حسابان سال دوم متوسطه دوره قدیم

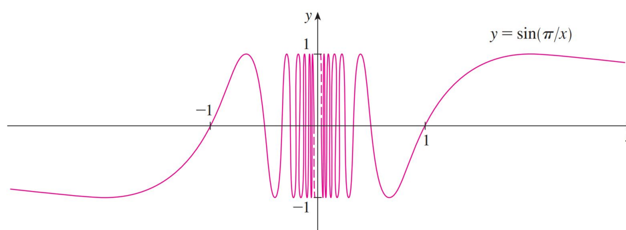
۲ــ آیا مقدارهای $\frac{1}{x}$ وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ جواب خود را از طریق نمودار تابع $\frac{1}{x}$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



فعالیت بالا نشان می‌دهد این طور نیست که هر تابعی در هر نقطه‌ای حتماً حد داشته باشد. توابعی هستندکه مقدارهای آن‌ها، با نزدیک شدن x (در دامنه تابع) به عددی مانند a به هیچ عددی نزدیک نمی‌شوند. گوییم این‌گونه توابع در آن نقطه حد ندارند.

مثال. تابع $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است، ولی در هر نقطه حقیقی دیگر تعریف شده است. بنابراین شرایط تعریف حد این تابع در نقطه صفر وجود دارد.

شکل ۶: نمودار تابع $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$



با این حال از جدول مقادیر تابع در نقاط نزدیک به صفر و نمودار تابع مشخص است که تابع در نقطه صفر حد ندارد. زیرا هنگامی که مقادیر x به عدد صفر نزدیک می‌شود، مقادیر تابع به هیچ عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود. به بیان دقیق‌تر، مقادیر تابع بین ۱− و ۱ در حال نوسان است.

جدول ۱: جدول مقادیر تابع در سمت راست نقطه صفر

x	0.5	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001	0.0001	0.00001
$\sin\frac{\pi}{x}$	0.1094	0.5212	0.8896	−0.7174	−0.9995	−0.9892	0.9946	−0.8595

جدول ۲: جدول مقادیر تابع در سمت چپ نقطه صفر

x	-0.5	-0.1	-0.05	-0.01	-0.005	-0.001	-0.0001	-0.00001
$\sin\frac{\pi}{x}$	-0.1094	-0.5212	-0.8896	0.7174	0.9995	0.9892	-0.9946	0.8595

★

در کتاب حساب و جبر سال سوم آموزش متوسطه سال‌های دور، بعد از معرفی حد تابع و چند مثال، به بیان حد تابع بر اساس ε و δ پرداخته شده است و مثالی از بررسی حد تابع به کمک این تعریف بیان شده است.

شکل ۷: استفاده از δ و ε در کتاب حساب و جبر سال‌های دور

حد تابع را به‌طور صحیح‌تر، می‌توان این‌طور تعریف کرد:
عدد b را حدتابع $f(x)$ وقتی $x \to a$ گویند، اگروقتی که $|x-a|$ $(x \neq a)$ ازعدد مثبت α کوچکترمی‌شود، $|f(x)-b|$ نیزازعددمثبت مفروض ε کوچکترشود (α وابسته به ε وتابع است).

$$|x-a| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-b| < \varepsilon$$

بیان زیر، برای تعریف حد کوتاهتر است، ولی کاملا دقیق نیست:
عدد b را حد تابع $f(x)$ وقتی $x \to a$ گویند، اگر به ازای مقادیر به قدر کافی کوچک $|x-a|$، مقدار $|f(x)-b|$ نیز به قدر دلخواه کوچك شود.

مثال ـ عدد ۲ حد تابع $f(x) = \frac{۴x^۲-۱}{۲x-۱}$ است، وقتی $x \to \frac{۱}{۲}$، زیرا اگر بخواهیم نامساوی زیر برقرار باشد $(x \neq \frac{۱}{۲})$:

$$\left|\frac{۴x^۲-۱}{۲x-۱} - ۲\right| < \varepsilon$$

نتیجه می‌شود:

$$|۲x-۱| < \varepsilon$$

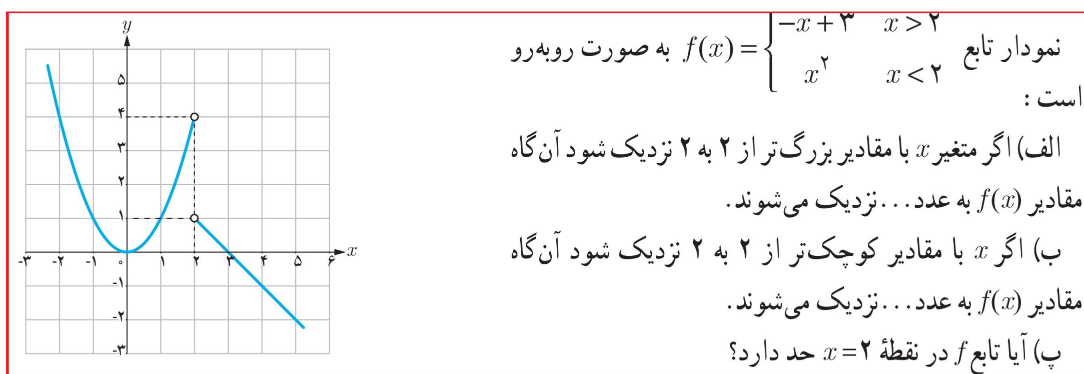
و یا:

$$\left|x-\frac{۱}{۲}\right| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

یعنی قدرمطلق تفاضل تابع و حد: $\left|\frac{۴x^۲-۱}{۲x-۱} - ۲\right|$، از مقدار مفروض ε به شرطی کوچکتر می‌شود که $\left|x-\frac{۱}{۲}\right|$ از $\frac{\varepsilon}{۲}$ کوچکتر باشد. دراین‌مثال $\alpha = \frac{\varepsilon}{۲}$ است.

۲.۲ حد چپ و راست در ابتدای صفحه ۱۲۳، مراد از تعریف حد یک‌طرفه به کمک مثالی ساده توضیح داده شده است. فعالیت بعد از آن نیز به درک بهتر حد چپ و راست به دانش آموز کمک می‌کند:

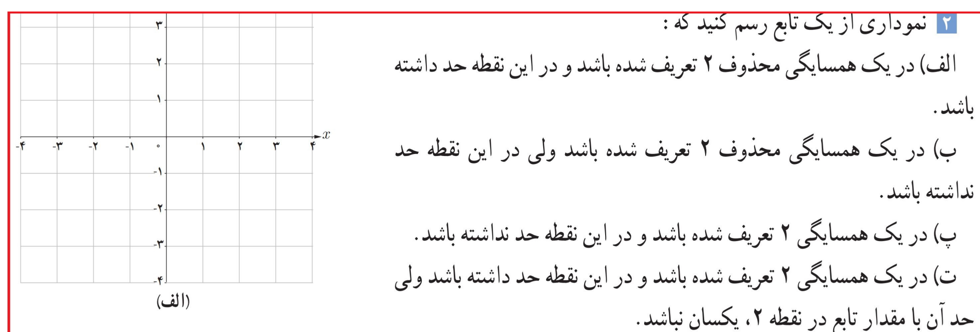
شکل ۸: فعالیت صفحه ۱۲۳



به علاوه، کار درکلاس شماره ۲ صفحه ۱۲۵ (شکل ۹) و تمرین ۳ صفحه ۱۲۸ به دانش آموز کمک می‌کند تا نقش همسایگی‌های راست و چپ را در وجود حدهای راست و چپ به روشنی درک کند و بتواند با استفاده از آنها به بررسی وجود حد در یک نقطه بپردازد. پیشنهاد می‌شود دبیر درکلاس به روشنی برای دانش آموز بیان کند که همانگونه که برای وجود حد تابع در یک نقطه، ابتدا لازم است تابع در یک همسایگی محذوف آن نقطه تعریف شده باشد، برای وجود حد راست ابتدا لازم است تابع در یک همسایگی راست آن نقطه تعریف شده باشد.

از آنجایی که کار درکلاس شماره ۲ صفحه ۱۲۵ اولین قدم دانش آموز برای یافتن حدهای یکطرفه است، پیشنهاد می‌شود دبیر برای هرکدام از موارد چندین نمونه را برای دانش آموزان بیان کند:

شکل ۹: کار درکلاس شماره ۲ صفحه ۱۲۵



در فعالیت صفحه ۱۲۶ (شکل ۱۰) به کمک تابع جز صحیح توضیح داده شده است که اگر دو تابع در یک همسایگی راست (چپ) یک نقطه با هم برابر باشند، آنگاه حد راست (چپ) آنها نیز با هم برابر خواهد بود. در اینجا یکی از توابع ثابت در نظر گرفته شده است.

شکل ۱۰: فعالیت صفحه ۱۲۶

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازهٔ (۱,۲) که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $g(x)=۱$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to ۱^+}[x]=\lim\limits_{x\to ۱^+}g(x)=۱$.

به همین ترتیب، در (۰,۱) که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=۰$ منطبق است و داریم $\lim\limits_{x\to ۱^-}[x]=\lim\limits_{x\to ۱^-}h(x)=۰$.

اگر دوتابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی :

اگر $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=L$.

برای اینکه دانش آموز موضوع را کلی‌تر درک کند، می‌توان از دو تابع استفاده کرد که ثابت نباشند. به عنوان مثال، می توان دو تابع $f(x)=x-[x]$ و $g(x)=|x|$ را در همسایگی راست صفر در نظر گرفت.

همان‌گونه که در بخش قبل توضیح داده شد، دانش آموز تا اینجا با مثالی برخورد نکرده است که مقدار تابع به بینهایت میل کند. از این رو، به نظر می‌رسد تمرین شماره ۵ صفحه ۱۲۹ (شکل ۱۱) تمرین مناسبی برای این بخش نباشد.

شکل ۱۱: تمرین شماره ۵ صفحه ۱۲۹

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-۲}$ در نقطه $x=۲$ چه می‌توان گفت؟

۳.۲ قضایای حد

برای بیان قضایای حد توابع، ابتدا ضروری است حد تابع ثابت و حد تابع همانی معرفی شوند. گرچه دانش آموز در بخش قبلی با مثال‌هایی شامل حد این دو تابع روبرو شده است (مانند فعالیت صفحه ۱۲۶ که در خلال آن حد تابع ثابت محاسبه شده است)، فعالیت صفحه ۱۳۰ با آوردن یک مثال سعی می‌کند این حدود را در حالت کلی بیان کند. با توجه به اینکه همانند سایر مطالب این کتاب، قضایای حد توابع بدون برهان آورده شده‌اند، باید به دانش آموز کمک کرد تا بتواند به نوعی درستی این قضایا را استدلال کند. این کار با یک مثال و در قالب رسم نمودار توابع در فعالیت صفحه ۱۳۱ انجام شده است.

مثال آورده شده در فعالیت صفحه ۱۳۵ (شکل ۱۲) به خوبی به دانش آموز گوشزد می‌کند که برای استفاده از قضایای حد مانند حد مجموع، ابتدا باید وجود حد هر یک از توابع را بررسی کرد.

از طرفی، کار در کلاس صفحه ۱۳۶ (شکل ۱۳) تاکید می‌کند که ممکن است حد مجموع دو تابع در یک نقطه موجود باشد، اما یکی از توابع در آن نقطه حد نداشته باشد.

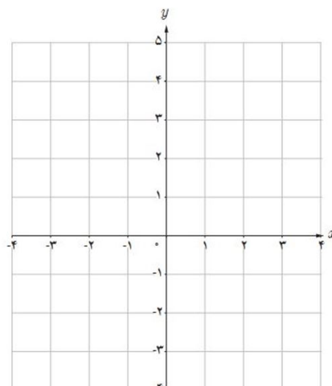
شکل ۱۲: فعالیت صفحه ۱۳۵

فعالیت

دو تابع $f(x)=\begin{cases}۴ & x\leq ۲\\ ۳ & x>۲\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}-۲ & x\leq ۲\\ -۱ & x>۲\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع $f+g$ را بیابید.

ب) نمودار توابع f، g و $f+g$ را رسم کنید.



پ) آیا حد دو تابع f و g در $x=۲$ وجود دارد؟

ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=۲$ وجود دارد؟

ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد $f+g$ در $x=۲$ استفاده کرد؟ چرا؟

برای استفاده از قضیه حد مجموع، حد تفاضل و ...، ابتدا باید توجه کنیم که حد توابع f و g در نقطه $x=a$ موجود باشند.

شکل ۱۳: کار در کلاس صفحه ۱۳۶

کار در کلاس

فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

تمرین ۶ صفحه ۱۴۰ (شکل ۱۴) نیز در همین راستا مطرح شده است.

شکل ۱۴: تمرین ۶ صفحه ۱۴۰

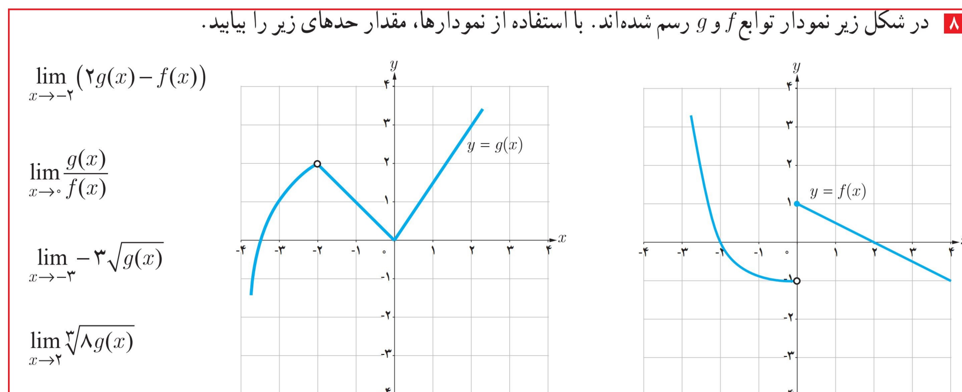
۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

ممکن است دو مطلب فوق دانش آموز را تشخیص رابطه بین حد دو تابع و حد به عنوان مثال مجموع (تفاضل، حاصلضرب و یا خارج قسمت) آنها دچار سردرگمی کند. پیشنهاد می‌گردد دبیر توضیح کافی در این خصوص ارائه دهد. به علاوه می‌توان در توضیح دو مطلب اخیر، دو خط زیر را به عنوان تذکر در کتاب گنجاند:

برای اینکه حد مجموع (تفاضل، حاصلضرب و یا خارج قسمت) دو تابع در یک نقطه موجود باشد، لزومی ندارد هرکدام از آن توابع در آن نقطه دارای حد باشد. به عنوان مثال دو تابع فعالیت صفحه ۱۳۵ را ببینید. اما هرگاه بخواهیم از قضایای حد برای محاسبه حد مجموع، تفاضل، حاصلضرب و یا خارج قسمت دو تابع در یک نقطه استفاده کنیم، ابتدا حتما باید بررسی کنیم که هر دو تابع در آن نقطه دارای حد باشند.

تمرین ۸ صفحه ۱۴۰ می‌تواند به عنوان یک مثال خوب برای توضیحات بالا به عنوان یک فعالیت در کلاس مطرح شود. این تمرین کمک می‌کند دانش آموز به خوبی استفاده از قضایای حد را صرف نظر از چگونگی توابع تمرین کند. (شکل ۱۵)

شکل ۱۵: تمرین ۸ صفحه ۱۴۰



محاسبه حد $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$ به کمک قضایای حد ممکن نیست، زیرا تابع $f(x)$ در نقطه صفر حد ندارد. با این وجود، اگر تابع $\frac{g(x)}{f(x)}$ را محاسبه کنیم داریم

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \frac{3x}{-x+2} & x \geq 0 \\ \frac{-4x}{x^2-4} & x \leq 0 \end{cases}$$

بنابراین با اینکه تابع f در نقطه صفر حد ندارد، حد تابع $\frac{g(x)}{f(x)}$ در نقطه صفر برابر با صفر است.

۴.۲ حد توابع کسری، حالت $\frac{0}{0}$ در ابتدای این بخش ذکر شده است، که در آنجا به محاسبه حد توابع کسری پرداخته شده است که حد صورت و مخرج در نقطه مورد نظر هر دو برابر صفر است و از قضیه حد خارج قسمت نمی‌توان استفاده کرد.

مثال صفحه ۱۴۲ (شکل ۱۶)، نمونه‌ای از یک تابعی کسری است که حد صورت و مخرج هر دو در نقطه داده شده برابر صفر است:

شکل ۱۶: مثال صفحه ۱۴۲

مثال : مقدار $\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}$ را بیابید.

حل : حد صورت و مخرج کسر در x=۱، برابر صفر می‌شود و در صورت کسر عبارت گنگ $\sqrt{x+۸}-۳$ وجود دارد
در این‌گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می‌کنیم تا این عبارت گنگ، به عبارتی گویا تبدیل شود
در این مثال، صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{x+۸}+۳$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۸}+۳}{\sqrt{x+۸}+۳}\right)$$

اما آوردن عبارت ”در این گونه موارد“ در توضیحات حل این مثال، دانش آموز را مجاب می‌کند که راه حل بیان شده در این مثال کلی بوده و هرگاه با حدی این‌چنین شامل عبارت گنگ مواجه شد، باید عبارت گنگ را با ضرب در یک عبارت، تبدیل به عبارتی گویا نماید. با این‌حال، مثال صفحه ۱۴۳ (شکل ۱۷) را ببینید: واضح است که دانش آموز با روش بیان شده نمی‌تواند حد را محاسبه نماید. همانگونه که دیده می شود، این

شکل ۱۷: مثال صفحه ۱۴۳

مثال : مقدار $\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}$ را بیابید.

حل : قرار می‌دهیم : $t=\sqrt{۱+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می‌شود و داریم x=$t^۲$−۱ و بنابراین،

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}=\lim_{t\to ۱}\frac{t-۱}{t^۲-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{(t-۱)}{(t-۱)(t+۱)}=\frac{۱}{۲}$$

حد در کتاب با استفاده از تغییر متغیر حل شده است.

شاید برای حل حد توابع کسری در حالت $\frac{0}{0}$، بهترین توضیح کلی برای دانش آموز همانی باشد که در ابتدای بخش آورده شده است: ”برای محاسبه حد تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن حد صورت و مخرج برابر صفر است، از قضایای حد نمی‌توانیم استفاده کنیم. برای محاسبه حد اینگونه توابع (در صورت وجود) با استفاده از اتحادهای جبری و اتحادهای مثلثاتی سعی می‌کنیم که صورت و مخرج کسر را ساده نماییم، تا جایی که دیگر حالت $\frac{0}{0}$ دیگر رخ ندهد.“

به نظر می‌رسد چند نکته دیگر باید در این بخش گنجانده شود. ابتدا اینکه در مورد حدود چپ و راست در این حالت هیچ توضیح و یا مثالی آورده نشده است. در تمرین‌های این فصل در صفحه ۱۴۴ تنها یک مورد از

حدود یکطرفه آورده شده است:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2[x]-8}{x-2}.$$

در همین تمرین دانش آموز باید بداند که برای رفع حالت $\frac{0}{0}$ و ساده کردن صورت و مخرج، ابتدا باید تابع جز صحیح را از معادلات خود به نحوی کنار بگذارد. بنابراین پیشنهاد می‌شود دبیر در مورد حد تابع جز صحیح در کلاس توضیحات کامل ارائه دهد. این توضیحات لزوما مربوط به این بخش نیست و حتی به نظر می‌رسد باید در بخش اول (مثال پایین صفحه ۱۲۶ را ببینید) داده شود.

یکی از مهمترین انتقاداتی که می‌توان به کتابهای حسابان رشته ریاضی وارد کرد، حذف بسیاری از مفاهیم اساسی از آنها است. باید دقت کرد که علی رغم حذف برخی از این مطالب، دانش آموز مجبور است به نحوی آنها را فراگیرد. مثال بسیار واضح در این زمینه حد توابع گویا در حالت ابهام $\frac{0}{0}$ است. کتاب حسابان پایه یازدهم در مورد تقسیم چندجمله‌ای بر عامل صفر شونده صحبتی نکرده است و حتی کتاب حسابان پایه دوازدهم نیز در این خصوص مطلبی نیاورده است. این موضوع تنها با چند مثال و نه به صورت کلی آمده است. مثالهای آمده در کتاب حسابان ۱ به نظر کافی نیست و در موضوع محاسبه حد توابع در حالت ابهام $\frac{0}{0}$، می توان مثال های متنوعی از بکارگیری تجزیه، فاکتورگیری و انواع اتحادها بیان کرد. **بر خلاف انتظار، برخی از این مطالب در کتاب‌های رشته تجربی به شیوه‌ای بهتر بیان شده است.** شکل ۱۸ از صفحه ۱۳۱ کتاب ریاضی پایه یازدهم تجربی آورده شده است.

شکل ۱۸: صفحه ۱۳۱ کتاب ریاضی پایه یازدهم تجربی

به‌طور کلی اگر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم؛ به شرط آنکه $\lim_{x\to a} Q(x)\neq ۰$

اگر در محاسبهٔ $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم : $P(a)=Q(a)=۰$ دیگر با قانون اخیر نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می‌کنیم :
چون $P(a)=Q(a)=۰$ بنابراین $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند. ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

نکته بسیار جالب توجه دیگر اینکه در پاورقی صفحه ۱۴۱ کتاب حسابان پایه یازدهم رشته ریاضی (شکل ۱۹) اشاره شده است که در این کتاب تنها حد آن دسته از کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای های از حداکثر درجه دو و یا عبارت رادیکالی به صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند.

شکل ۱۹: پاورقی صفحه ۱۴۱

۱. در این کتاب، حد کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند. همچنین، در عبارات شامل توابع مثلثاتی، توان تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به‌صورت $x+b$ یا $2x+b$ خواهند بود.

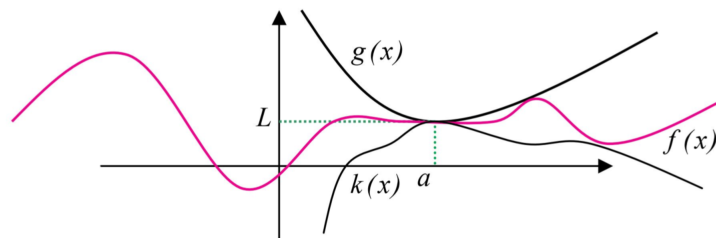
در حالی که در کتاب ریاضی پایه یازدهم رشته تجربی، حد کسرها در حالت بسیار کلی‌تر و با تنوع بیشتر مانند کسرهای شامل چندجمله‌ای های درجه سوم وجود دارد. حتی در زمینه حد توابع مثلثاتی نیز کتاب ریاضی پایه یازدهم رشته تجربی بر خلاف انتظار شامل مثال‌های بسیار متنوع تری از کتاب‌های حسابان رشته ریاضی است!

مطلب بعدی حذف قضیه فشردگی از کتاب است. در کتاب حسابان سال سوم چاپ ۱۳۹۲، این قضیه بیان شده بود (شکل ۲۰).

شکل ۲۰: قضیه فشردگی-صفحه ۱۳۲ کتاب حسابان سال سوم دوره متوسطه قدیم

قضیه :

اگر تابعی مانند $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بین دو تابع $g(x)$ و $k(x)$ قرار گیرد، مثلاً $k(x) \leq f(x) \leq g(x)$، و g و k در نقطه a دارای حد یکسان L باشند، نتیجه می‌شود $\lim_{x\to a} f(x) = L$.



با حذف این قضیه، حد تابعی مانند $\frac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر، برای دانش آموز رشته ریاضی تنها با کمک نمودار و جدول مقادیر بیان شده است.

باید یادآوری کنیم که در کتاب ”حساب و جبر“ سال سوم متوسطه سال های دور، علاوه بر همه موارد ذکر شده بالا، بخشی با عنوان ”چند حد مهم“ وجود داشت که در آن حد توابعی مانند $\frac{sinx}{x}$ و $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ به تفصیل

مورد بررسی قرار گرفته‌اند (شکل ۲۱). همچنین، حدودی مانند $\frac{f(x)}{g(x)}$ در حالت‌های ابهام $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ معرفی شده و مثال‌هایی داده شده‌اند.

برای یادآوری، حد تابع $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ در کتاب مبانی آنالیز دوره کارشناسی رشته ریاضی به کمک سری‌ها برای دانشجویان بیان می شود.

شکل ۲۱: معرفی حدود مهم در کتاب ''حساب و جبر'' سال سوم متوسطه سال‌های دور

۵- چند حد مهم

۱- اگر x به رادیان بیان شود، حد $\frac{sin x}{x}$ ، وقتی $x \to 0$ ، برابراست با ۱.

اثبات- ابتدا خودتان باتوجه به‌شکل ، به‌این پرسشها پاسخ بدهید:

- چرا $M'M < \widehat{M'AM}$ ؟

- چرا $\widehat{M'AM} < MT + M'T$ ؟

- چرا MT برابر با تانژانت x است ؟

حال روشن است که می‌توانیم بنویسیم :

$2 sin x < 2x < 2 tg x$

بنابراین برای‌مقادیر $0 < x < \frac{\pi}{2}$ داریم :

$sin x < x < tg x$

O, x, P, M, T, A, M′

۵۴

باید اشاره کرد که در کتاب حاضر همانند کتاب حسابان سال سوم چاپ ۱۳۹۲، حدود بینهایت و حد در بینهایت گنجانده نشده‌اند و بررسی آنها به سال چهارم متوسطه موکول شده است. اما در کتاب ''حساب و جبر'' سال سوم متوسطه سال‌های دور، این حدود نیز معرفی شده بودند و مثال‌های متنوعی از آنها داده شده بود (شکل ۲۲ را ببینید).

شکل ۲۲: حدود بینهایت در کتاب ''حساب و جبر'' سال سوم متوسطه سال‌های دور

۴ - توابعی که در حد به صورتهای $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty - \infty$ بیرون می‌آیند .

مثال ۱ - مطلوب است $\lim_{x\to\pm\infty}(۳x^۲-۴x+۵)$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(۳x^۲-۴x+۵)=\lim_{x\to\pm\infty}x^۲\left(۳-\frac{۴}{x}+\frac{۵}{x^۲}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}(۳x^۲)=+\infty$$

به این ترتیب ، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی در چند جمله‌ای $f(x)$ ، مقدار x لحاظ قدر مطلق به سمت بی‌نهایت میل کند ، حد $f(x)$ برابر است با حد جملهٔ بادرجهٔ بزرگتر

مثال ۲ - مطلوب است $\lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۲-x})$

جملهٔ بادرجهٔ بزرگتر در این عبارت، همان $۲x$ است(جملهٔ بعدی از درجهٔ $\frac{۱}{۲}$ است)
بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to-\infty}(۲x+\sqrt{۲-x})=\lim_{x\to-\infty}(۲x)=-\infty$$

مثال ۳ - مطلوب است $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۴x-۱}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲-۳x+۱}{x^۲+۴x-۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^۲\left(۲-\frac{۳}{x}+\frac{۱}{x^۲}\right)}{x^۲\left(۱+\frac{۴}{x}-\frac{۱}{x^۲}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲-\frac{۳}{x}+\frac{۱}{x^۲}}{۱+\frac{۴}{x}-\frac{۱}{x^۲}}=۲$$

یعنی وقتی‌در‌تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ ، صورت ومخرج هم درجه باشند ، حدکسر ، وقتی $x\to\pm\infty$، برابر است بانسبت ضریب جملهٔ بزرگترین درجهٔ صورت برضریب بزرگترین درجهٔ مخرج .

مثال ۴ - مطلوب است $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-\sqrt{x}}{۳x+\sqrt{۳x-۲}}$

جواب : $\frac{۲}{۳}$ (چرا ؟)

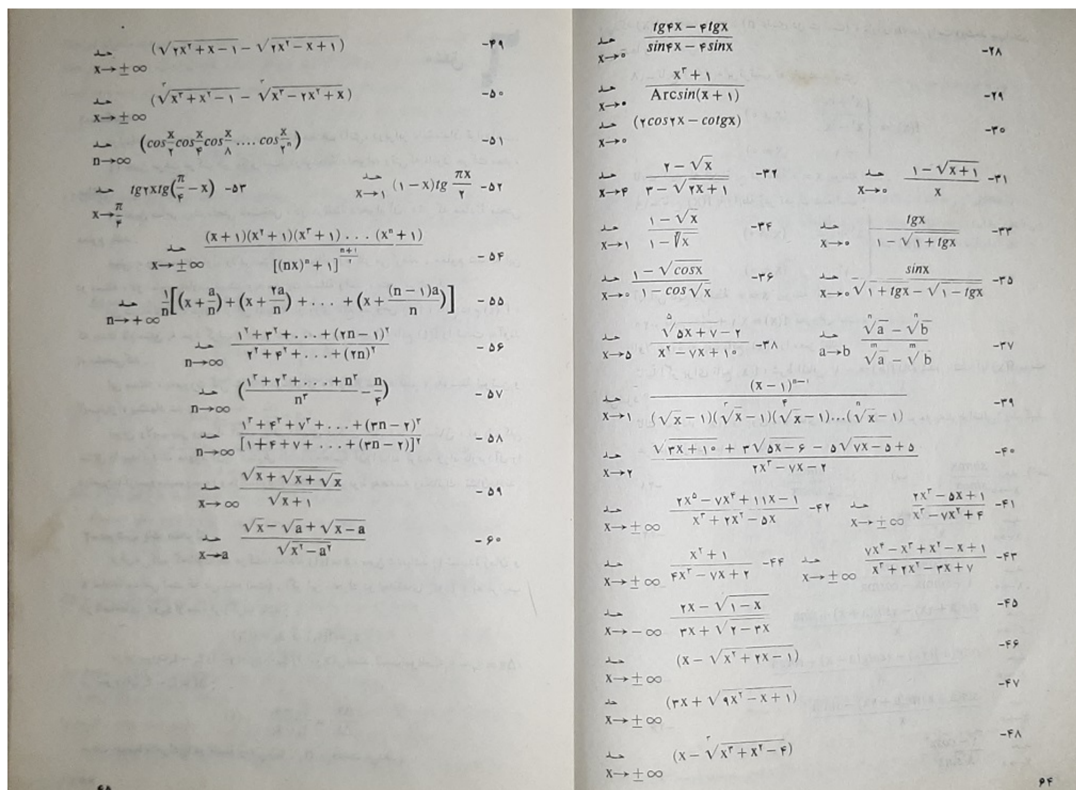
مثال ۵ - مطلوب است $\lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt{۳x^۲+x})$

دراینجا، جملهٔ x وجملهٔ $-\sqrt{۳x^۲+x}$ ، هردو ازدرجهٔ اولند ، ولی‌ضریب جملهٔ دوم از لحاظ قدر مطلق بزرگتر است (ضریب x مساوی ۱ و ضریب همین x درجملهٔ $-\sqrt{۳x^۲+x}$ ازلحاظ قدر مطلق مساوی $\sqrt{۳}$ است) . بنابراین داریم :

۵۸

در مورد تمرین‌ها نیز باید گفت اگر مسیری تاریخی برای کتاب‌های دوره متوسطه رشته ریاضی در نظر بگیریم، با هر بار ویرایش جدید، تعداد تمرین‌های هر فصل و تنوع آنها کمتر شده است. مبحث حد نیز از این قاعده

شکل ۲۳: تمرین‌های محاسبه حد در کتاب ”حساب و جبر“ سال سوم متوسطه سال‌های دور



-۲۸ $\lim_{x\to 0}\frac{tg4x-4tgx}{sin4x-4sinx}$

-۲۹ $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+1}{Arcsin(x+1)}$

-۳۰ $\lim_{x\to 0}(2cos2x-cotgx)$

-۳۱ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ -۳۲ $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

-۳۳ $\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{1-\sqrt{1+tgx}}$ -۳۴ $\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$

-۳۵ $\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{\sqrt{1+tgx}-\sqrt{1-tgx}}$ -۳۶ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{cosx}}{1-cos\sqrt{x}}$

-۳۷ $\lim_{a\to b}\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}{\sqrt[m]{a}-\sqrt[m]{b}}$ -۳۸ $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[5]{5x+7}-2}{x^2-7x+10}$

-۳۹ $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^{n-1}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[4]{x}-1)\dots(\sqrt[n]{x}-1)}$

-۴۰ $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x+10}+3\sqrt{5x-6}-5\sqrt{7x-5}+5}{2x^3-7x-2}$

-۴۱ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-5x+1}{x^3-7x^2+4}$ -۴۲ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^5-7x^4+11x-1}{x^3+2x^2-5x}$

-۴۳ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x^4-x^3+x^2-x+1}{x^3+2x^2-3x+7}$ -۴۴ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{4x^3-7x+2}$

-۴۵ $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-\sqrt{1-x}}{3x+\sqrt{2-3x}}$

-۴۶ $\lim_{x\to\pm\infty}(x-\sqrt{x^2+2x-1})$

-۴۷ $\lim_{x\to\pm\infty}(3x+\sqrt{9x^2-x+1})$

-۴۸ $\lim_{x\to\pm\infty}(x-\sqrt[3]{x^3+x^2-4})$

۶۴

-۴۹ $\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{2x^2-x+1})$

-۵۰ $\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2-1}-\sqrt[3]{x^3-2x^2+x})$

-۵۱ $\lim_{n\to\infty}(cos\frac{x}{2}cos\frac{x}{4}cos\frac{x}{8}\dots cos\frac{x}{2^n})$

-۵۲ $\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$ -۵۳ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}tg2x\,tg(\frac{\pi}{4}-x)$

-۵۴ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)(x^3+1)\dots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$

-۵۵ $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[(x+\frac{a}{n})+(x+\frac{2a}{n})+\dots+(x+\frac{(n-1)a}{n})\right]$

-۵۶ $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\dots+(2n)^2}$

-۵۷ $\lim_{n\to\infty}(\frac{1^3+2^3+\dots+n^3}{n^3}-\frac{n}{4})$

-۵۸ $\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\dots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\dots+(3n-2)]^2}$

-۵۹ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

-۶۰ $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

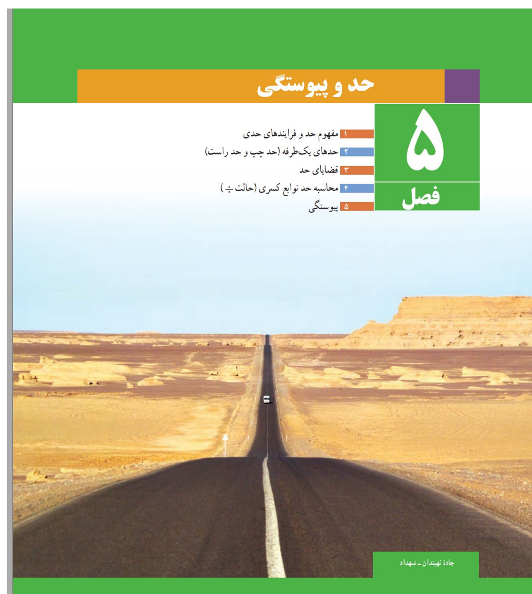
۶۵

مستثنی نبوده است. در توضیح همین بس که کتاب ”حساب و جبر“ سال سوم دوره متوسطه سال‌های دور در فصل حد علاوه بر مثال‌های متعدد، شامل ۶۰ تمرین محاسبه حد توابع متنوع است (شکل ۲۳ را ببینید).

کتاب ویرایش حاضر در مبحث حد نیز با وجود برخی کاستی‌ها، تفکیک مناسبی برای محتوای خود اتخاذ کرده است. محتوای مربوط به حد در این کتاب هر چند بسیار خلاصه و اندک است، با این حال خود به چند قسمت کوچک تر شامل ”مفهوم حد و فرآیندهای حدی، حدود چپ و راست، قضایای حد و محاسبه حد توابع کسری“ تقسیم شده‌اند (شکل ۲۴) تا خواننده بتواند روندی روشن از موضوع را دنبال کند.

۵.۲ پیوستگی قبل از اینکه به بررسی مبحث ”پیوستگی“ در این کتاب بپردازیم، چند نکته کلی در این خصوص قابل بیان است که تصویر روشنی از آنچه رخ داده نشان دهد. نکته بسیار قابل تامل این است که درس پنجم از فصل پنجم در این کتاب، تنها جایی است که به مبحث پیوستگی توابع اختصاص داده شده است. به عبارت دیگر، از آنجایی که در کتاب حسابان ۲ پایه دوازدهم نیز هیچ محتوایی از مبحث پیوستگی به طور مستقیم گنجانده نشده است، تنها صفحاتی که دانش آموز رشته ریاضی و فیزیک در مورد مبحث مهم پیوستگی مطلبی را فرا می‌گیرد، همین ۶ صفحه مطلبی است که در این درس آورده شده است. می‌توان تصور کرد که چه اتفاقی قرار است رخ دهد. دقت کنید که در این ۶ صفحه، هیچ اشاره‌ای به قضایای مربوط به پیوستگی توابع

شکل ۲۴: فصل پنج کتاب حسابان یک پایه یازدهم در مورد حد

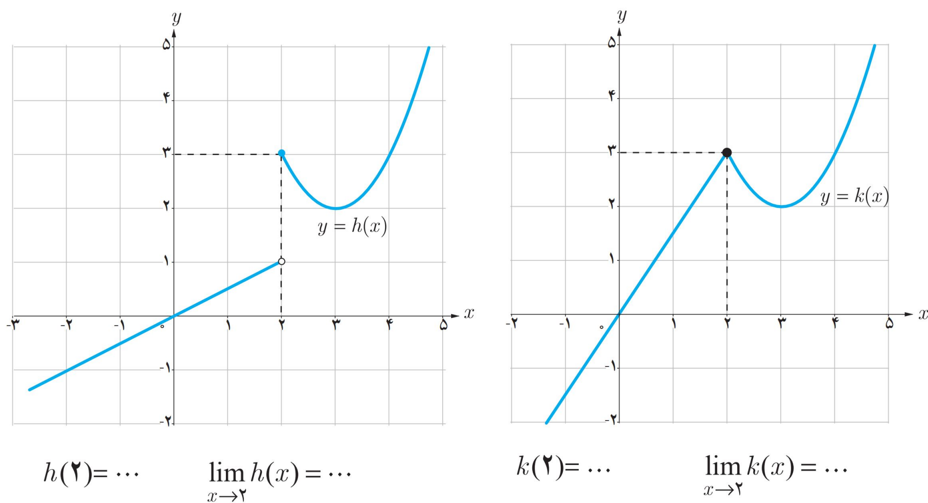


نشده است و بنابراین دانش آموز تنها حقایقی که در مورد پیوستگی فرامی‌گیرد، همان مثال‌هایی است که در این صفحات آورده شده است.

در ادامه به بررسی این درس به طور مفصل می‌پردازیم.

اولین فعالیت در این درس، تا حدی به دانش آموز کمک می‌کند درکی هندسی از مفهوم پیوستگی پیدا کند:

شکل ۲۵: فعالیت صفحه ۱۴۶



پس از بیان شرایط پیوستگی در صفحه ۱۴۶ (شکل ۲۶)، چند تابع به عنوان مثال آورده شده است که پیوستگی این توابع با توجه به حد آنها از درس‌های قبل نتیجه می‌شود.

شکل ۲۶: مثال صفحه ۱۴۶

مثال : در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a، $\lim\limits_{x\to a} \sin x = \sin a$ و $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$. پس توابع $y = \sin x$ و $y = \sqrt[3]{x}$ در هر عدد a، پیوسته‌اند.

در کار در کلاس صفحه ۱۴۷ (شکل ۲۷)، دانش آموز تمرین می‌کند که ناپیوستگی تابع در یک نقطه می‌تواند به واسطه چندین شرط بیان شده در تعریف پیوستگی رخ دهد. اما به نظر می‌رسد قبل از کار در کلاس، باید مثال‌هایی آورده شود که در آنها ناپیوستگی توابع به دلیل برقرار نبودن شرط‌های مختلف بررسی شود. چند مثال مانند توابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ و $g(x) = [x]$ در صفحه ۱۴۶ آورده شده است که در آنها دلیل ناپیوستگی بیان نشده است و صرفا بر اساس نمودار بیان می‌کند که تابع در نقطه داده شده ناپیوسته است.

شکل ۲۷: کار در کلاس صفحه ۱۴۷

کار در کلاس

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در x=۳ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در x=۳ پیوسته نیست)

۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دو نقطه.

پیشنهاد می‌شود پس از کاردرکلاس صفحه ۱۴۹، پیوستگی تابع جز صحیح در یک یا چند جمله به صورت کلی و شفاف بیان شود: "تابع $f(x) = [x]$ در هر عدد صحیح ناپیوسته است. در حقیقت، تابع $f(x) = [x]$ در هر عدد صحیح از راست پیوسته است. در بقیه اعداد حقیقی، این تابع پیوسته است."

با توجه به آنچه دانش آموز از درس‌های قبل در مورد حد برخی توابع فراگرفته است، پیشنهاد می‌شود پیوستگی برخی توابع پرکاربرد و مشهور به صورت یک حقیقت کلی و نه در قالب مثال بیان شود. از طرفی، تقریبا تمامی قضیه‌های این کتاب بدون برهان آورده شده‌اند. بنابراین می‌توان پیوستگی این توابع را نیز در قالب یک قضیه آورد:

قضیه ۱.۲. *با توجه به آنچه در مورد حد توابع در بخش‌های قبلی خواندیم،*

(۱) *توابع* $\sin x$ *و* $\cos x$ *در هر نقطه مانند* a *پیوسته هستند.*

(۲) *هر چند جمله‌ای در هر عدد حقیقی مانند* a *پیوسته است.*

علاوه بر آن، از آنجایی‌که این درس تنها بخشی است که به مفهوم پیوستگی پرداخته شده است ، **پیشنهاد می‌شود چند مطلب به این درس اضافه گردد. ابتدا چند قضیه درباره پیوستگی توابع که به موازات قضایای حد در درس‌های قبلی پیش می‌رود:**

قضیه پیشنهادی ۱.۲. *اگر توابع* $f(x)$ *و* $g(x)$ *در نقطه* a *پیوسته باشند، آنگاه*

(۱) *توابع* $f(x)+g(x)$ *و* $f(x)-g(x)$ *و* $f(x)g(x)$ *نیز در نقطه* a *پیوسته هستند.*

(۲) *تابع* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *نیز در نقطه* a *پیوسته است به شرط اینکه* $g(a)\neq 0$.

توابع $f(x)=2\sin x-4\cos x$ و $g(x)=x^2\sin x$ در هر عدد حقیقی a پیوسته هستند.

از دو قضیه قبل در می‌یابیم که هر تابع گویا به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ (تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله‌ای هستند) در همه نقاط حقیقی به جز در ریشه‌های مخرج کسر، پیوسته است.

تابع $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-4}$ به جز در دو نقطه 2 و -2، در همه نقاط حقیقی پیوسته است.

باید توجه کرد که قضایای پیشنهاد شده در بالا، به موازات قضایای مربوط به حد توابع که در درس‌های قبل این کتاب آورده شده‌اند، پیش می‌رود و دانش آموز تنها با درک مفوم پیوستگی می‌تواند آنها را بلافاصله مورد استفاده قرار دهد و مثال‌های بسیار فراوانی از توابع پیوسته را فراگیرد. به عنوان مثال، قضیه صفحه ۱۳۶ در مورد حد توابع رادیکالی که در شکل ۲۸ آمده است را ببینید: با استفاده از این قضیه، می‌توان قضیه زیر در

شکل ۲۸: قضیه صفحه ۱۳۶

قضیه :

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم : $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}f(x)}$

به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

مورد پیوستگی اینگونه توابع را ارائه داد:

قضیه پیشنهادی ۲.۲. *اگر تابع $f(x)$ در نقطه a پیوسته باشد، آنگاه*

(۱) *اگر n فرد باشد، آنگاه تابع $\sqrt[n]{f(x)}$ نیز در نقطه a پیوسته است.*
(۲) *اگر n زوج باشد و تابع $f(x)$ نامنفی باشد، آنگاه تابع $\sqrt[n]{f(x)}$ نیز در نقطه a پیوسته است*

نکته دیگر در مورد ضرورت آوردن قضایای پیشنهادی فوق این است حل برخی تمرین‌های این درس نیز مستلزم استفاده از این قضایا است. به عنوان مثال تمرین ۱ قسمت پ و تمرین ۲ قسمت ت در صفحه ۱۵۱ را ببینید.

۳. کتاب حسابان دو، پایه دوازدهم

قسمتی عمده این کتاب را مفاهیم آنالیزی تشکیل می‌دهند. به جز دو فصل اول و دوم این کتاب که به طور مختصر شامل دروسی در مورد توابع و مثلثات است، سه فصل بعدی به مباحث حد، مشتق و کاربردهای مشتق اختصاص یافته است. نکته بسیار مهم در مورد این کتاب این است که هیچ درسی به موضوع پیوستگی اختصاص داده نشده است. این در حالی است که در کتاب حسابان یک پایه یازدهم نیز مبحث پیوستگی به صورت بسیار خلاصه و بدون آوردن هیچ قضیه و حقیقت کلی در مورد پیوستگی توابع آورده شده است.

۱.۳ حدهای نامتناهی قبل از بررسی این بخش از کتاب، نکاتی کلی در مورد محتوای کتاب‌های مختلف در این خصوص بیان می‌کنیم. ویرایش حاضر کتاب‌های متوسطه رشته ریاضی و فیزیک، به مانند کتاب حسابان چاپ سال ۱۳۹۲ و کتاب حساب دیفرانسیل وانتگرال چاپ ۱۳۹۴، مبحث ''حد در بینهایت و حدود نامتناهی'' را به سال دوازدهم منتقل کرده است. گرچه مفاهیم مربوط به این حدود در کتاب ''حساب دیفرانسیل و انتگرال'' چاپ سال ۱۳۹۴ بسیار کامل‌تر می‌باشد و در حین بررسی این فصل در مقاطع مختلف این موضوع به چشم می‌آید، اما این مباحث در سال‌های دور در کتاب‌های سال سوم دوره متوسطه گنجانده شده بود (شکل ۲۹ را ببینید).

در ادامه به بررسی این فصل کتاب می‌پردازیم.

فصل سوم کتاب حسابان دو با یک فعالیت آغاز می‌شود که برای معرفی حدود نامتناهی، حد تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه صفر به کمک نمودار و جدول مقادیر بررسی می‌کند. توضیحات این فعالیت در مورد حد بینهایت این تابع استاندارد است (شکل ۳۰).

شکل ۲۹: فهرست کتاب ‘‘حساب و جبر’’ سال سوم متوسطه سال‌های دور

به نام خدا

فهرست

شکل ۳۰: فعالیت صفحه ۴۷

با توجه به این فعالیت مشاهده می‌شود که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شود مقادیر $f(x)$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد. به بیان دیگر می‌توان $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی، بزرگ‌تر کرد به شرطی که x را به اندازه کافی با مقادیر بزرگ‌تر از صفر، به صفر نزدیک کرد در این صورت می‌نویسیم : $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$.

در صفحه ۴۸ مطلبی آورده شده است که از نظر ریاضی صحیح نیست و دانش آموز را در مورد وجود و عدم وجود حد گمراه می‌کند:

شکل ۳۱: تذکر صفحه ۴۸

✤ **تذکر** : این نماد نشان می‌دهد که حد فوق موجود نیست. چون مقدار تابع به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود و مثبت بی‌نهایت فقط یک نماد است که نشان می‌دهد مقدار تابع از هر عدد مثبتی می‌تواند بزرگ‌تر باشد.

در واقع جمله آورده شده در شکل ۳۱ نادرست است. زیرا حدهای بینهایت وجود دارند ولی مقدار این حدها عدد حقیقی نیست. دقت کنید که در انتهای صفحه ۵۰ کتاب مطلب درستی در مورد مفهوم بینهایت آمده است: "در ریاضیات می‌گوییم بینهایت از هر مقدار دیگری بیشتر است." این مطلب کاملاً صحیح است. یعنی مثبت بینهایت عدد جدیدی است که آنرا با نماد $+\infty$ نمایش می‌دهند و از همه اعداد حقیقی بزرگتر است (ولی خود یک عدد حقیقی نیست). به همین صورت منفی بینهایت عددی است (که خود عددی حقیقی نیست) که آنرا با نماد $-\infty$ نمایش می‌دهند و از همه اعداد حقیقی کوچکتر است، [۱۲] را ببینید. باید دقت کرد که در آنالیز ریاضی، این یک قرارداد استاندارد است و دستگاه به وجود آمده از الحاق این دو عدد به اعداد حقیقی (یعنی $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) را دستگاه توسعه یافته اعداد حقیقی می‌نامند و گاهی به صورت $[-\infty, +\infty]$ نمایش می‌دهند.

در صفحه ۵۱ کتاب، برخی قضایا در مورد حدهای بینهایت آورده شده‌اند و همان‌گونه که در پاورقی این صفحه اشاره شده است، این قضیه‌ها بدون اثبات بیان شده‌اند.

پیشنهاد ما در این فصل، معرفی بهتر و بیشتر مثبت بینهایت و منفی بینهایت در شروع این فصل است. زیرا با این کار می‌توان به دانش آموز درک بسیار بهتری از حد بینهایت بخشید و علاوه بر آن، به جای آوردن قضایایی کاملا انتزاعی و بدون هیچ گونه برهان، از خواص بینهایت‌ها استفاده کرد. به عبارت دیگر، دانش آموز می‌تواند کار با این دو عدد را همانند اعمال روی اعداد حقیقی فرا گرفته و تا انتها آسوده باشد. ضمن اینکه در دروس دوره دانشگاه (به عنوان مثال درس مبانی آنالیز ریاضی) نیز با این اعداد مواجه می‌شود. بیان چند قرارداد زیر در مورد اعمال روی بینهایت‌ها کمک می‌کند دانش آموز درک بهتری از قضایای آورده شده پیدا کند:

۱. برای هر عدد حقیقی مانند x داریم

$$-\infty < x < +\infty, \qquad \text{و} \qquad \frac{x}{+\infty} = 0 \qquad \text{و} \qquad \frac{x}{-\infty} = 0.$$

۲. (مجموع و تفاضل) برای هر عدد حقیقی مانند x روابط زیر برقرار است:

$$x + \infty = +\infty, \qquad x - \infty = -\infty, \qquad +\infty - x = +\infty, \qquad -\infty - x = -\infty$$

$$+\infty + \infty = +\infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty.$$

۳. (ضرب) اگر x یک عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه

$$x \times (-\infty) = -\infty, \qquad x \times (+\infty) = +\infty;$$

و اگر x یک عدد حقیقی منفی باشد، آنگاه

$$x \times (-\infty) = +\infty, \qquad x \times (+\infty) = -\infty.$$

با آوردن توضیحات بالا به عنوان معرفی بینهایت‌ها، به عنوان مثال قضایایی مانند قضیه ۴ و قضیه ۵ (شکل ۳۲) این درس به راحتی برای دانش آموز قابل استدلال است، زیرا از قضایای حد می‌تواند استفاده کند.

شکل ۳۲: قضیه ۵ صفحه ۵۴

قضیه ۵ : اگر $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L$ آن‌گاه؛[۱]

الف) $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big)=+\infty$

ب) اگر $L>0$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}\big(f(x).\,g(x)\big)=+\infty$

پ) اگر $L<0$ آن‌گاه $\lim_{x\to a}\big(f(x).\,g(x)\big)=-\infty$

تذکر : قضیه فوق برای حالتی که $x\to a^+$ یا $x\to a^-$ نیز برقرار است.

در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال چاپ سال ۱۳۹۴، تعریف حد با استفاده از دنباله‌ها بیان شده است (شکل ۳۳).

شکل ۳۳: تعریف صفحه ۷۱ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تعریف: فرض کنیم D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوییم حد تابع f در a، عدد حقیقی L است و می‌نویسیم، $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنهٔ f مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست $(a_n\neq a)$، دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگرا باشد.

باید دقت کرد که در کتاب یاد شده، دنباله‌ها و همگرایی آنها در یک فصل مجزا بیان شده است و دانش آموز می‌تواند در درس‌های آینده از مفهوم دنباله به عنوان ابزاری قدرتمند استفاده کند. به همین ترتیب حدود بینهایت نیز به کمک دنباله‌ها تعریف شده‌اند.

شکل ۳۴: تعریف صفحه ۱۰۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تعریف ۱ : فرض کنیم تابع D زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوییم حد تابع f در a، $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنهٔ f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n\neq a$، $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=+\infty$

تعریف حد با استفاده از دنباله‌ها تعریفی جامع به نظر می‌رسد و باعث می‌شود دانش آموز بتواند برهانی برای قضیه‌ها بیابد و محاسبه حدود را به همراه اثبات آن فرابگیرد. شکل ۳۵ را ببینید.

شکل ۳۵: مثال صفحه ۱۰۷ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

مثال: به کمک تعریف (۲) ثابت کنید $\lim_{x\to ۲} \frac{-۱}{(x-۲)^۲}=-\infty$

حل: برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که همگرا به ۲ است و $x_n\neq ۲$ داریم

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-۱}{(x_n-۲)^۲}=-\infty$$

زیرا وقتی دنباله $\{x_n\}$ به ۲ همگرا باشد، دنباله $\{(x_n-۲)^۲\}$ با مقادیر مثبت به صفر همگراست بنابراین دنباله $\{f(x_n)\}$ به $-\infty$ واگراست.

اما در کتاب ویرایش حاضر، فصل مربوط به دنباله‌ها حذف شده است. از این رو، امکان استفاده از آنها در بررسی حد وجود ندارد.

در صفحه ۵۵، مجانب قائم توابع با آوردن مثالی معرفی شده است. سپس مثالی آورده شده است که شرایط مختلف وجود مجانب قائم با کمک نمودار نشان داده شده است.

مثال دیگری در صفحه ۵۶ وجود دارد (شکل ۳۶) که مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ را بررسی می‌کند. اما این مثال به هیچ عنوان به دانش آموز برای درک راه حل یافتن مجانب قائم توابع کمکی نمی‌کند. زیرا در متن سوال، نقاط مورد بررسی برای وجود مجانب قائم آورده شده است. **به عبارت دیگر، دانش آموز باید در حالت کلی بفهمد که این نقاط از کجا آمده‌اند. پیشنهاد ما این است که ابتدا مثالی ساده‌تر آورده شود که در آن به طور مشخص در حالت کلی روش یافتن مجانب قائم بیان شده باشد.** به عنوان مثال:
مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$ را در صورت وجود بیابید.

با توجه به تعریف مجانب قائم، به دنبال نقطه‌هایی هستیم که حد تابع در آنها بینهایت شود. با توجه به قضیه ۳، برای یافتن این نقاط در توابع کسری باید نقاطی را بررسی کنیم که حد تابع مخرج در آن نقطه برابر صفر باشد. در تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-4}$ حد مخرج کسر یعنی $x-4$ در نقطه $x=4$ برابر صفر است. پس شرط مجانب قائم را برای این نقطه بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\frac{x+1}{x-4}=+\infty.$$

بنابراین $x=4$ مجانب قائم تابع است.

پیشنهاد می‌کنیم مثال صفحه ۵۶ نیز به همین ترتیب اصلاح شود و نقاط داده شده در متن سوال حذف شوند تا دانش آموز با راه حل بیان شده در مثال بالا، خود به دنبال یافتن نقاط احتمالی مورد بررسی باشد. بعلاوه، به نظر می‌رسد نگارش حل این مثال کمی گمراه کننده است:

شکل ۳۶: مثال صفحه ۵۶

مثال : کدام‌یک از خطوط $x=-1$ و $x=3$ مجانب‌های قائم تابع $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ می‌باشند؟

حل : شرایط مجانب قائم را برای دو خط مذکور بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=-\infty$$

به علاوه از آنجا که $\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$ می‌توانیم بگوییم $x=-1$ نیز مجانب قائم منحنی تابع f است از طرفی

$$\lim_{x\to3} f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to3}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

خط $x=3$ شرایط مجانب قائم را ندارد. لذا منحنی تابع f فقط یک مجانب قائم به‌صورت $x=-1$ دارد.

به عبارت دقیق‌تر، جمله ”به علاوه از آنجا که $\lim_{x\to-1^-} f(x)=+\infty$“ اضافی است و باید حذف شود. زیرا همین که $\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty$ کافی است که $x=-1$ را یک مجانب قائم در نظر بگیریم. نکته مشابهی در مورد مثال ابتدایی صفحه ۵۷ (شکل ۳۷) وجود دارد. **دقت کنید که دانش آموز نمی داند**

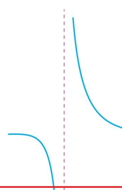
شکل ۳۷: مثال صفحه ۵۷

مثال : نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می‌باشد؟

حل :

$$f(x)=\frac{x+1}{x(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$$



پس خط $x=0$ مجانب قائم منحنی تابع است و در مجاورت این خط نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو خواهد بود.

چرا حد تابع در نقطه صفر بررسی شده است.

کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴، فقط شامل یک مثال در موضوع مجانب قائم در صفحه ۱۱۰ کتاب است که از این جهت کتاب ویرایش جدید کمی با تفصیل بیشتر کار کرده است. در همان صفحه، سوالی آورده شده است (شکل ۳۸) که علاوه بر اینکه دانش آموز یافتن مجانب قائم را تمرین می‌کند، با حد مجموع دوتابع روبرو می‌شود که یکی از آنها حد بینهایت دارد و دیگری حد ندارد.

شکل ۳۸: تمرین صفحه ۱۱۰ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴



۱ــ مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

گذشته از تمرین یافتن مجانب قائم، این سوال مزیت دیگری نیز دارد. دانش آموز با حد تابعی $f+g$ روبرو می‌شود که f در نقطه دارای حد بینهایت است و تابع g حد ندارد. در این گونه موارد دانش آموز باید بداند که از قضیه ۵ در محاسبه حد مجموع نمی‌تواند استفاده کند.

۲.۳ حد در بینهایت مطابق معمول، معرفی حد توابع در بینهایت نیز با بررسی رفتار یک تابع با استفاده از نمودار و جدول مقادیر صورت گرفته است. توضیحات صفحه ۶۳ کتاب به خوبی به دانش آموز کمک می کند تا بفهمد که برخی توابع با بزرگ شدن (یا کوچک شدن) مقادیر x، مقادیر تابع $f(x)$ افزایش می‌یابد.
پس از آوردن چند مثال در صفحه ۶۵، گزاره‌ای کلی در مورد حد چندجمله‌ای‌ها در بینهایت (شکل ۳۹) بیان شده است که بسیار مفید است و یکی از نقاط مثبت کتاب حاضر در این درس می‌باشد.

شکل ۳۹: صفحه ۶۵

به‌طور کلی حد هرچند جمله‌ای به‌صورت $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=\lim_{x\to\pm\infty}a_nx^n$$

همان‌گونه که در کار در کلاس صفحه ۶۶ (شکل ۴۰) آمده است، نکته قبل در محاسبه حد توابع کسری در بینهایت مورد استفاده قرار می‌گیرد. چند سوال آمده در این کار در کلاس سبب می‌شود دانش آموز به خوبی این مطلب را فرا بگیرد. باید گفت که در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴، به جای مطلب فوق با حل دو مثال توضیح داده شده است. **از این رو، کتاب حاضر با آوردن مطلبی جامع‌تر در مورد چندجمله‌ای‌ها، بیان بهتری ارائه کرده است.**

اما باید تاکید کنیم با این که قضایای صفحه ۶۵ برای حدود نامتناهی در بینهایت (بدون اثبات) بیان شده است و معدود مثال‌هایی نیز آورده شده است، کتاب در شرح و توضیح این حدود بسیار ضعیف عمل کرده است. برای درک بهتر موضوع، به آوردن چند مثال زیبا از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴ بسنده می‌کنیم. این مثال‌ها (شکل ۴۱ و ۴۲) به دانش‌آموز گوشزد می‌کند که هنگام استفاده از قضایا باید دقت کرد که شرایط کاملا برقرار باشد.

شکل ۴۰: کار در کلاس صفحه ۶۶

کار در کلاس

۱ الف) اگر $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}\ x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ و $g(x)=b_m x^m + b_{m-1}\ x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ دو چند جمله‌ای باشند نشان دهید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$$

شکل ۴۱: مثال صفحه ۱۱۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

مثال: $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to-\infty}(|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}-x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)=+\infty$$

شکل ۴۲: مثال صفحه ۱۱۶ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تذکر مهم : همواره نمی‌توان از قاعده‌های حدگیری برای حدهای نامتناهی استفاده کرد. زیرا $+\infty$ و یا $-\infty$ عدد نیستند.

مثلاً نوشتن اینکه $\lim_{x\to+\infty}x^3-x=\lim_{x\to+\infty}x^3-\lim_{x\to+\infty}x=+\infty-\infty$

غلط است ($+\infty-\infty$ را نمی‌توان تعریف کرد) با این وجود، می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to+\infty}x^3-x=\lim_{x\to+\infty}x(x^2-1)=+\infty$$

دقت کنید که هیچ گونه مثالی این چنین برای محاسبه حد در بینهایت عبارات کسری در کتاب نیامده است. علاوه بر این، در مورد محاسبه حد در بینهایت توابع رادیکالی هیچ گونه مثال و یا مطلبی نیامده است. در پاورقی صفحه ۵۴ ذکر شده است که در محاسبه حدود در این کتاب، حالات $\infty \times 0$ و $\infty - \infty$ مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. بنابراین به طور مشخص، برخی از سوالات تمرین شماره ۳ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴ در اهداف کتاب حاضر قرار نمی‌گیرند.

تمرین‌های این بخش نیز از نظر تعداد و تنوع بسیار محدود است. با این حال، **تمرین یافتن مجانب‌های افقی و قائم یک تابع به طور همزمان نکته مثبت تمرین‌های کتاب حاضر است** که در کار در کلاس صفحه ۶۸ و تمرین شماره ۴ در صفحه ۶۹ (شکل ۴۳) آمده است.

شکل ۴۳: تمرین شماره ۴ صفحه ۶۹

۴ مجانب‌های افقی و قائم نمودارهای هر یک از توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید :

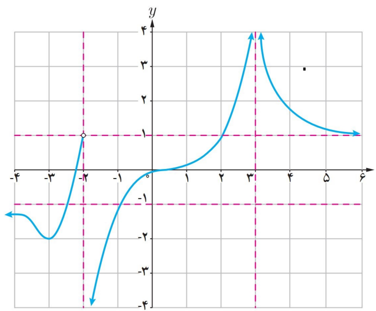
الف) $y=\frac{2x-1}{x-3}$ ب) $y=\frac{x}{x^2-4}$

پ) $y=\frac{1+2x^2}{1-x^2}$ ت) $y=\frac{2x}{1+x^2}$

باید اشاره کنیم که با وجود نمودار تابع در تمرین شماره ۲ صفحه ۶۹ (شکل ۴۴)، محاسبه حدهای خواسته شده به نظر بسیار ابتدایی باشد و هدف خاصی را محقق نکند.

شکل ۴۴: تمرین شماره ۲ صفحه ۶۹

۲ برای تابع f که نمودار آن داده شده است موارد زیر را به‌دست آورید :



الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=$

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=$

پ) $\lim_{x\to 3^+} f(x)=$

ت) $\lim_{x\to 3^-} f(x)=$

ث) $\lim_{x\to -2^+} f(x)=$

ج) مجانب‌های افقی و قائم

نکته دیگر این است که با نگاهی به کتاب ریاضی ۳ پایه دوازدهم رشته تجربی در می‌یابیم که نه تنها تفاوتی از لحاظ محتوا و عمق مطالب دیده نمی‌شود، چه بسا در برخی موارد تنوع مثال‌ها و تمرین‌ها در کمال تعجب در رشته تجربی بیشتر است! تمرین‌های کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴ از نظر تعداد بسیار بیشتر بوده و دارای تنوع است، تمرین‌های محاسبه حدود شامل توابع رادیکالی، جزء صحیح و توابع مثلثاتی. به عنوان نمونه، تمرین سوم از صفحه ۱۲۰ این کتاب را که در مورد حد در بینهایت است (شکل ۴۵) ببینید.

موضوع دیگر حذف مبحث مجانب مایل است. مفهوم مجانب مایل که ابزار مفیدی برای درک رفتار برخی توابع در بینهایت است و در رسم نمودار توابع کاربرد دارد، در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴، به عنوان موضوعی فرعی در بخش حد در بینهایت آورده شده است. اضافه بر این باید اشاره کنیم که در کتاب ”جبر و آنالیز“ سال چهارم متوسطه چاپ ۱۳۶۰، موضوع مجانب مایل حتی از این هم وسیع‌تر بررسی شده است. این کتاب، یک فصل کامل را به بررسی خطوط مجانب (عمودی، افقی و مایل) اختصاص داده و در پایان فصل ۳۷ تمرین متنوع در این خصوص دارد. **موضوع**

شکل ۴۵: تمرین ۳ صفحه ۱۲۰ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

۳ــ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{x-3}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+5x-1}{2x^2-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x-1}$ ت) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-\sqrt{x^2+2x})$

ث) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$ ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} [\frac{x^2+x+1}{x^2+x+3}]$

چ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\tan^{-1}x}{2-x}$ ح) $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{8x^3+2x^2}-2x)$

خ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+3}}$ د) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

مجانب مایل از کتاب حاضر حذف شده است. دیدگاه نگارندگان این پژوهش این است که حذف این موضوع خللی به روند مطالب کتاب وارد نیاورده است.

۳.۳ مشتق این فصل از کتاب سه درس دارد که در آنها ضمن معرفی مفهوم مشتق، به بیان رابطه مشتق‌پذیری و پیوستگی توابع و همچنین محاسبه مشتق توابع پرداخته می‌شود. اولین مطلب کلی که در بررسی این فصل به سرعت نمایان می‌شود، تغییرات زیاد ویرایش جدید نسبت به کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴ است. متاسفانه باید گفت که در این فصل نیز برخی از این تغییرات سبب کاهش کیفیت محتوا شده است. در هر درس به تفصیل این ادعا را توضیح خواهیم داد. **نکته دوم این که با مقایسه سریع کتاب حاضر با کتاب ریاضی ۳ رشته علوم تجربی می‌توان دریافت که محتوای این فصل تقریبا در دو کتاب یکسان است. بر خلاف اینکه انتظار می‌رود دانش آموز رشته ریاضی محتوای عمیق‌تر و جنبه‌های متنوع‌تری از درس را فراگیرد.**

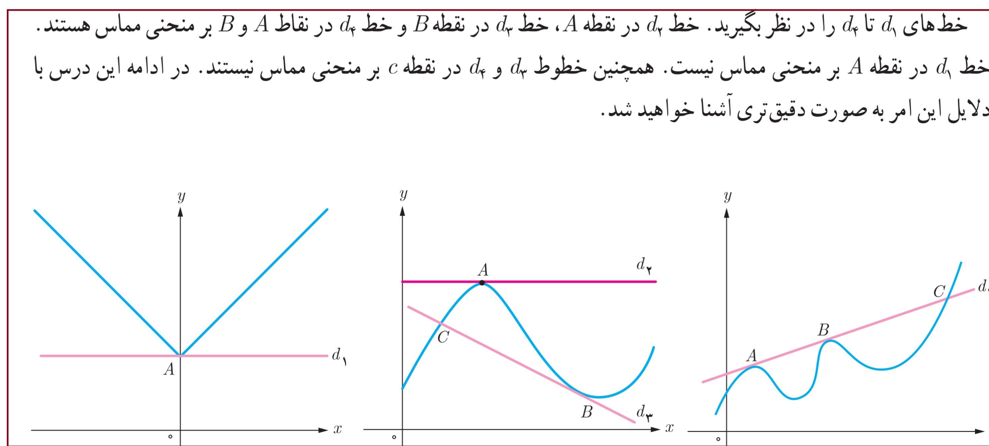
موضوع بسیار تامل برانگیز، حذف برخی از اساسی‌ترین مطالب ریاضی برای یک دانش آموز رشته ریاضی است. گرچه در ادامه به تفصیل به بررسی این فصل خواهیم پرداخت، ابتدا دقت کنید که موضوعات مشتق ضمنی، مشتق توابع وارون مثلثاتی و مشتق توابع نمایی و لگاریتمی از کتاب حاضر حذف شده است. برخی از این مفاهیم را می‌توان با برنامه‌ریزی مناسب در ریاضیات عمومی دوره کارشناسی پوشش داد. اما نکته مهم این است که محتوای دروس ریاضیات عمومی دوره کارشناسی تغییری نکرده است.

۴.۳ آشنایی با مفهوم مشتق در کتاب حاضر مبحث مشتق با توضیحاتی در مورد خط مماس بر یک منحنی و شیب آن آغاز شده است. گرچه این فرآیند برای معرفی مفهوم مشتق استاندارد است، اما باید گفت توضیحات آورده شده در کتاب حاضر بسیار طولانی (از صفحه ۷۲ تا صفحه ۷۷) و کسل کننده است. علاوه بر آن، روند

بیان مطالب به هیچ عنوان روشن نبوده و به نظر نمی‌رسد دانش آموزی که قرار است برای اولین بار با مفهوم مشتق روبرو شود، بتواند با این روند ارتباط برقرار کند. توضیح اینکه در اولین درس از این فصل، ابتدا سخن از شیب خط آورده شده، بدون اینکه رابطه یافتن شیب خط بیان شود. البته می‌دانیم که دانش آموز از سال‌های قبل با مفهوم شیب خط آشنایی دارد، اما این رابطه چند صفحه جلوتر هم بیان شده است.

در ادامه دانش آموز مطالبی در مورد خط مماس می‌خواند و بدون اینکه بتواند دلیلی بیابد، با چند نمودار روبرو می‌شود که مثال‌هایی از خط مماس و غیرمماس آمده است.

شکل ۴۶: صفحه ۷۳



خط‌های d_1 تا d_4 را در نظر بگیرید. خط d_2 در نقطه A، خط d_3 در نقطه B و خط d_4 در نقاط A و B بر منحنی مماس هستند. خط d_1 در نقطه A بر منحنی مماس نیست. همچنین خطوط d_3 و d_4 در نقطه c بر منحنی مماس نیستند. در ادامه این درس با دلایل این امر به صورت دقیق‌تری آشنا خواهید شد.

در ادامه، معرفی خط مماس بر یک منحنی با استفاده از تقریب آن بوسیله خطوط متقاطع در صفحات ۷۴ تا ۷۷ آمده است. تاکید می‌کنیم در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ سال ۱۳۹۴، معرفی خط مماس و شیب آن بسیار مختصر در صفحات ۱۲۱ و ۱۲۲ بیان شده است و به نظر می‌رسد بیان آن بسیار روشن تر بوده و برای فهم مطلب مفیدتر باشد. با این حال دلیل تغییر این بخش در ویرایش جدید مشخص نیست. در ویرایش قبلی، بعد از توضیحاتی در مورد خطوط قاطع، خط مماس به طور صریح تعریف می‌شود (شکل ۴۷).

شکل ۴۷: تعریف صفحه ۱۲۴ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تعریف خط مماس: اگر f بر بازهٔ بازی شامل a تعریف شده و حد زیر

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=m$$

موجود باشد، آنگاه خطی که از نقطهٔ (a,f(a))گذشته و به شیب m می‌باشد، **خط مماس** بر نمودار f در نقطهٔ (a,f(a)) نامیده می‌شود.

مشکل مشابهی در بیان رابطه دیگر محاسبه مشتق دیده می‌شود. در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴، با یک تغییر متغیر ساده بلافاصله رابطه دیگر یافتن مشتق تابع بیان می‌شود (شکل ۴۸).

شکل ۴۸: تعریف صفحه ۱۲۴ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی چاپ ۱۳۹۴

تعریف: فرض کنید a نقطه درونی از دامنه f است. در این صورت مشتق تابع f در x=a که آن را به $f'(a)$ نشان می‌دهیم، برابر است با

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

اگر فرض کنیم $\Delta x=x-a$ آنگاه $x=a+\Delta x$

بدیهی است که وقتی Δx به صفر میل کند، x هم به a میل می‌کند.

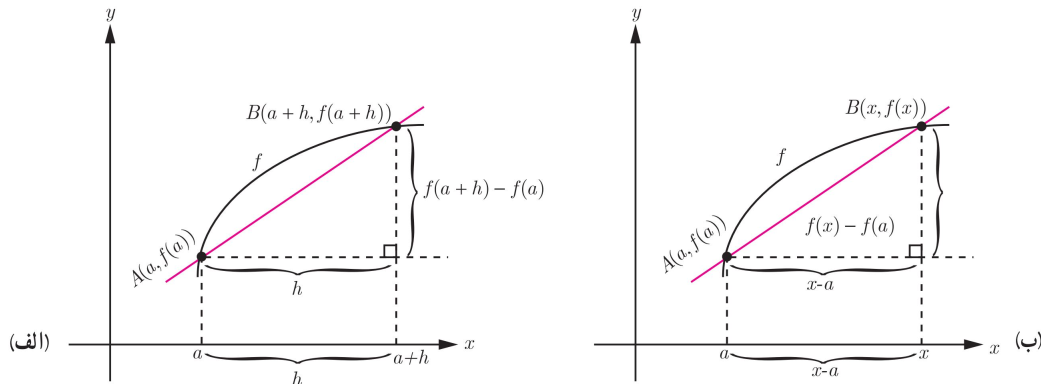
بنابراین

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

حال آنکه در ویرایش جدید سعی شده است رابطه دوم محاسبه مشتق، با استفاده از نمودار توضیح داده شود (شکل ۴۹). اما باز هم به نظر می‌رسد توضیحات آمده در صفحه ۷۹ طولانی و غیر ضروری بوده و کمکی به

دانش آموز نکند. البته در کار در کلاس صفحه ۸۰ کتاب به درستی قید شده است که به شیوه جبری نیز می‌توان رابطه دیگر محاسبه مشتق را به دست آورد.

شکل ۴۹: صفحه ۷۹



کار در کلاس پایین صفحه ۸۰ تمرین خوبی برای دانش آموز است تا بتواند از نظر هندسی رابطه بین شیب خط مماس بر منحنی و مشتق منحنی را درک کند. به علاوه، تمرین ۲ صفحه ۸۱ و تمرین ۸ صفحه ۸۳ از جمله تمرین‌های خوب این بخش در ویرایش جدید کتاب می‌باشند.

۵.۳ مشتق‌پذیری و پیوستگی این درس با یادآوری مفهوم مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه و تعریف مشتق تابع به صورت خلاصه آغاز شده است. در فعالیت صفحه ۸۴ و کار در کلاس صفحه ۸۵، دانش آموز با دو تابع روبرو می‌شود که در نقطه داده شده مشتق‌پذیر نیستند و در حقیقت در آنها ناپیوسته‌اند. سپس این حقیقت کلی که مشتق‌پذیری پیوستگی را نتیجه می‌دهد، در قالب قضیه صفحه ۸۶ آمده است (شکل ۵۰).

شکل ۵۰: قضیه صفحه ۸۶

قضیه: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه f در a پیوسته است.

اثبات: کافی است نشان دهیم: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}((x-a)(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})) =$$

$$\lim_{x\to a}(x-a).\lim_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}) = 0.f'(a) = 0$$

بنابراین $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = 0$ و از آنجا $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (چرا؟)

باید گفت اثبات این قضیه از معدود اثبات‌های آورده شده در این کتاب است. به علاوه، به نظر می‌رسد روند آوردن مطالب در این درس به همراه تفکیک صحیح این مطالب از درس قبل، به درک

بهتر دانش آموز کمک می‌کند. در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴، مطالب پشت سر هم و بدون تفکیک معناداری آورده شده بود.

بلافاصله در ادامه درس به خوبی تاکید می‌شود که عکس قضیه فوق برقرار نیست و مثالی برای روشن شدن مطلب آمده است (شکل ۵۱).

شکل ۵۱: قضیه صفحه ۸۶

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آن‌گاه f در $x = a$ مشتق‌پذیر هم نیست.

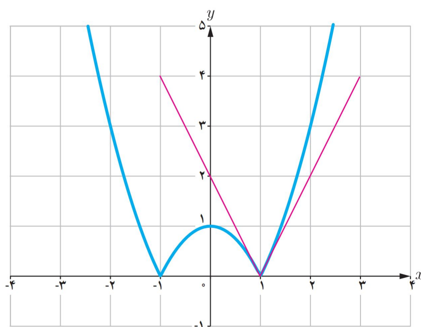
مثال بعد نشان می‌دهد که عکس قضیه درست نیست، یعنی حتی با وجود پیوستگی تابع در یک نقطه، لزوماً نمی‌توان مشتق‌پذیری تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت.

مثال : مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^۲ - ۱|$ را در $x = ۱$ بررسی کنید.

دانش آموز با مفهوم مشتق یکطرفه، یعنی مشتق‌های چپ و راست در خلال حل این مثال آشنا می‌شود. گرچه تعریف مشتق‌های چپ و راست در ادامه به طور مستقل آورده شده است.

شکل ۵۲: صفحه ۸۷

بنابراین $f'(۱)$ موجود نیست. به‌عبارت دیگر خط مماس بر منحنی در نقطه $x = ۱$ وجود ندارد. اما حدهای یک‌طرفه فوق را می‌توان با وجود نیم‌خط‌های مماس بر منحنی در نقطه $x = ۱$ توجیه کرد. اگر از سمت راست به نقطه $x = ۱$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر ۲ و اگر از سمت چپ به $x = ۱$ نزدیک شویم، شیب نیم‌خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر -۲ است. حدهای راست و چپ بالا را به ترتیب مشتق‌های راست و چپ f در $x = ۱$ می‌نامیم و با $f'_+(۱)$ و $f'_-(۱)$ نمایش می‌دهیم.



صفحات ۸۸ و ۸۹ کتاب به بیان حالاتی می‌پردازد که در آنها مشتق تابع وجود ندارد (شکل ۵۳). **نقطه مثبت کتاب در اینجا نسبت به ویرایش‌های قبلی، توضیحات خلاصه و مفید ابتدای صفحه ۸۹ است.**

کار در کلاس بعدی نیز به خوبی از نظر هندسی حالت‌های مختلف را نمایش می‌دهد. پیشنهاد ما در اینجا آوردن مثال‌هایی است که بیشتر از نظر جبری نقاطی که در آنها تابع مشتق دارد و یا مشتق پذیر نیست، بررسی شوند. به طور مشخص، مثالی در صفحه ۱۳۷ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ آورده شده است که به نظر مفید است (شکل ۵۴).

شکل ۵۳: صفحه ۸۹

به‌طور خلاصه می‌توان گفت :

اگر تابع f در $x=a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این‌صورت در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱ f در a پیوسته نباشد.

۲ f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطه گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطه گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

شکل ۵۴: مثال صفحه ۱۳۷ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴

مثال: مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases}(x+1)^3 & , x\leq 0\\ ax+a+b & , x>0\end{cases}$ در $x=0$ مشتق‌پذیر باشد.

حل: برای مشتق‌پذیربودن تابع f در $x=0$، ابتدا لازم است f در $x=0$ پیوسته باشد. یعنی تساوی‌های زیر برقرار باشند.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$$

$$1=a+b=1$$

$$a+b=1 \quad \text{و یا}$$

و با به‌اجرا گذاشتن شرط مشتق‌پذیری، باید $f'_+(0)=f'_-(0)$ و امّا

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(x+1)^3-1}{x}=\lim_{x\to 0}((x+1)^2+(x+1)+1)=3$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+a+b-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a$$

بنابراین با انتخاب $a=3$ و $b=-2$ تابع f در $x=0$ مشتق‌پذیر است.

با آمدن توضیحاتی در صفحه ۹۰، مشتق به عنوان یک تابع در ابتدای صفحه ۹۱ تعریف شده است. از کیفیت توضیحات صفحه ۹۰ که بگذریم، نکته قابل توجه این است که در هر دو مثال آورده شده برای محاسبه تابع مشتق، نحوه محاسبه دامنه تابع مشتق در این مثال‌ها توضیح داده نشده است.

دقت کنید که در معرفی تابع مشتق، نحوه محاسبه دامنه آن ذکر شده است اما در مثال‌های حل شده هیچ اشاره‌ای به چگونگی به دست آوردن دامنه نشده است.

به علاوه، پیشنهاد می‌شود کار در کلاس صفحه ۹۲ نیز به عنوان یک مثال حل شده آورده شود، زیرا اولین نمونه از تابعی چند ضابطه‌ای است که مشتق آن محاسبه می شود.

لازم است اشاره کنیم که در کتاب چاپ ۱۳۹۴، نقاط مشتق ناپذیری یک تابع، پس از معرفی تابع مشتق آورده شده است.

شکل ۵۵: مثال های صفحه ۹۱

بنابراین $f'(x)=2x$. همان‌گونه که قبلاً ذکر شد دامنه تابع f'، مجموعه اعداد حقیقی است. به کمک این دستور مقدار مشتق تابع $f(x)=x^2$ در هر نقطه را می‌توان حساب کرد، به‌طور مثال :

$$f'(-\frac{1}{5})=-\frac{2}{5}\ ,\ f'(\sqrt{7})=2\sqrt{7}\ \text{و}\ f'(50)=100$$

✤ **مثال :** اگر $f(x)=\frac{1}{x}$ ، تابع مشتق و دامنه آن را به‌دست آورید. سپس $f'(3)$ را مشخص نمایید.

حل : $f'(0)$ وجود ندارد. دامنه f' برابر $\mathbb{R}-\{0\}$ است. اگر $x\neq 0$ داریم :

نکته مثبت دیگر کتاب این است که معرفی مشتق توابع اولیه، با روندی منظم در صفحه ۹۲ شروع می‌شود. تابع مشتق برای $f(x) = x^r$ در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴، برای هر عدد گویای r بیان و ثابت شده است. با این حال، به نظر می‌رسد توضیحات آمده در کتاب حاضر برای معرفی مشتق این تابع کافی است و به خوبی خلاصه شده است. هر چند با کمال تعجب در پاورقی صفحه ۹۳ ذکر شده است که در این کتاب توابع رادیکالی تنها با فرجه ۲ و ۳ مدنظر هستند! با معرفی مشتق تابع $f(x) = x^r$، تنها کافی است مقادیر در نظر گرفته برای r را در این کتاب، اعداد گویا بیان کنیم. دقت کنید که مانند بسیاری از موارد در این کتاب، می توان اثباتی برای این فرمول نیاورد.

قوانین مهم محاسبه مشتق حاصل‌جمع، حاصل ضرب و تقسیم توابع در صفحه ۹۴ کتاب آورده شده است (شکل ۵۶).

شکل ۵۶: قوانین مشتق گیری صفحه ۹۴

۷ اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $kf\ (k\in\mathbb{R})$ ، $f\pm g$ ، fg و $\frac{f}{g}\ (g(a)\neq 0)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیرند و داریم :

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$

ب) $(kf)'(a)=kf'(a)$

پ) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

ت) $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

به کمک تعریف مشتق هر یک از روابط بالا را می‌توان ثابت نمود، اما در این کتاب به اثبات آنها نمی‌پردازیم.

در هر صورت بهتر است برهان حداقل یکی از روابط آورده شود. با این حال مثال بعد در همین صفحه و کار در کلاس صفحه ۹۵ (شکل ۵۷) برای تمرین بکاربردن این قوانین مناسب است.

شکل ۵۷: کار در کلاس صفحه ۹۵

کار در کلاس

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $f(x)=\frac{۱}{x-۴}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(۳x^{۲}+۵)$ پ) $h(x)=\frac{x}{۲x^{۲}+x-۱}$

۲ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$، $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ مقدار $(fg)'(۲)$ و $(\frac{f}{g})'(۲)$ را به‌دست آورید.

یادآوری می کنیم که برهان برخی از این قوانین درکتاب حسابان سال ۱۳۹۲ و برهان قانون مشتق تقسیم توابع درکتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ آورده شده است. **اما درکتاب حاضر، به طرز مناسبی مثال‌هایی بعد از بیان این قوانین آورده شده است.**

از دیگر نقاط قوت کتاب حاضر می‌توان به این نکته اشاره کرد که مطالب مختلف کتاب به نحو مناسبی تفکیک شده‌اند و دانش‌آموز در میان انبوهی از مطالب بهم پیوسته گم نمی‌شود. شاید این موضوع درکتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ مشهود باشد. با این که کتاب مذکور در بسیار موارد دارای محتوای مناسبی است، یکی از نقاط منفی آن عدم تفکیک مناسب مطالب است، به طوری که در برخی موارد دانش آموز رابطه میان دو موضوع را گم می‌کند. با این وجود، در بسیاری از موارد، توضیحات کتاب مذکور جامع‌تر به نظر می‌رسد. لطفا به نحوه بیان قانون مشتق تابع مرکب یا همان قاعده زنجیری در دو کتاب توجه کنید (شکل ۵۸ و ۵۹)

شکل ۵۸: قاعده زنجیری صفحه ۹۶

مشتق تابع مرکب / قاعده زنجیری

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم :
$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

مثال : اگر $h(x)=(x^{۲}+۳x+۱)^{۷}$، مطلوب است $h'(x)$.

پر واضح است که دانش‌آموزکدام یک از این توضیحات را بهتر درک می‌کند! به علاوه، فرمول‌های مشتق‌گیری از توابع مرکب خیلی به صورت خلاصه گفته شده است. **پیشنهاد می‌کنیم فرمول‌های بیشتری همراه با مثال‌های حل شده آورده شود.** از مهمترین آنها، می‌توان به توابع

$$y=\sqrt[n]{x},\qquad y=\sqrt[n]{x^m},\qquad y=\sqrt[n]{u},\quad u=\sin x, u=\cos x$$

شکل ۵۹: قاعده زنجیری در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴

۳ـ ۸ـ قاعدهٔ زنجیری

با وجود اینکه می‌توانیم مشتق $\sqrt{x}$ و $x^۴+۱$ را بیابیم ولی هنوز نمی‌توانیم مشتق $f(x)=\sqrt{x^۴+۱}$ را حساب کنیم.

توجه کنید که f تابعی ترکیبی است که اگر فرض کنیم $y=f(u)=\sqrt{u}$ و $u=g(x)=x^۴+۱$ می‌توانیم بنویسیم :

$y=h(x)=f(g(x))$

یعنی $h=fog$

قاعدهٔ محاسبه مشتق تابع‌های f و g را می‌دانیم، در نتیجه دانستن قاعده‌ای که براساس آن بدانیم چگونه مشتق $h=fog$ را برحسب مشتق‌های f و g پیدا کنیم، بسیار با اهمیت است. و این قاعده را **قاعدهٔ زنجیری** می‌نامند.

اکنون فرض کنید تابع $y=\frac{۱}{x^۲+۱}$ برابر است با تابع مرکب $y=f(g(x))$، که در آن $f(u)=\frac{۱}{u}$ و $u=g(x)=x^۲+۱$ و این توابع دارای مشتق‌های $g'(x)=۲x$، $f'(u)=\frac{-۱}{u^۲}$ هستند.

اشاره کرد. از روش بیان هم که بگذریم، تعداد مثال‌های حل شده برای موضوع مهمی مانند قاعده زنجیری در این کتاب کم است.

نکته دیگر معرفی نمادهای لایب‌نیتز برای مشتق است که در این کتاب هیچ اشاره‌ای به آنها نشده است:

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x).$$

این نمادها به طور گسترده در دروس ریاضی دوره کارشناسی مورد استفاده قرار می‌گیرند و معرفی آنها در این کتاب به نظر ضروری می‌رسد.

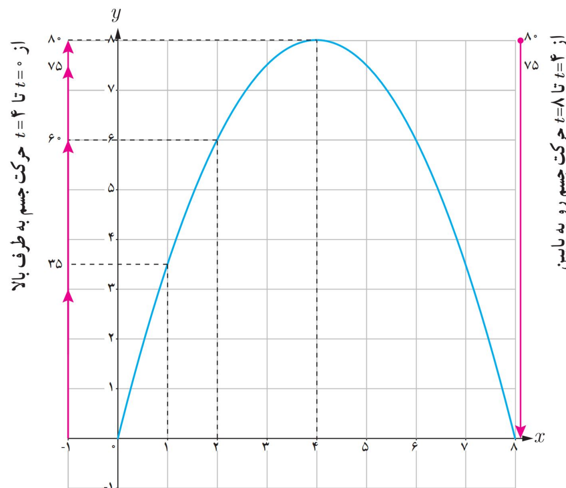
باید اشاره کنیم که در کتاب ریاضی ۳ پایه دوازدهم رشته تجربی، علاوه بر حذفیات بیان شده برای رشته ریاضی، مباحث نقطه عطف و تقعر و رسم نمودار نیز حذف شده‌اند.

در درس سوم از این فصل به آهنگ تغییر پرداخته شده است. **گرچه می توان محتوای این درس را به صورت خلاصه‌تر بیان کرد، به نظر می‌سد بیشتر مثال‌ها و تمرین‌ها مناسب است. به طور مشخص، مثال صفحه ۱۰۷ (شکل ۶۰) گرچه طولانی است، اما مفهومی و کاربردی است.**

صفحه ۱۰۶ نیز مثال مفیدی در مورد نرخ باروری دارد. کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ بیشتر در مورد آهنگ لحظه‌ای بحث کرده است و در مورد آهنگ متوسط مطالب کمی دارد. در هر حال روش بیان و مثال‌های کتاب حاضر در این موضوع با آنچه در کتاب سال ۱۳۹۴ آمده است کاملا متفاوت است.

شکل ۶۰: مثال صفحه ۱۰۷

سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای



مثال : جسمی را از سطح زمین به‌طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-5t^2+40t$ به‌دست می‌آید. به‌طور مثال ۲ ثانیه پس از پرتاب این جسم در ارتفاع ۶۰ متری از سطح زمین است.

به هر حال جسم پس از مدتی به زمین برمی‌گردد. نمودار مکان ــ زمان حرکت این جسم در شکل نشان داده شده است.

۶.۳ فصل پنجم: کاربردهای مشتق همانند آنچه در فصل‌های قبل نیز دیده می‌شود، تفکیک مناسب مطالب در این فصل نیز یکی از نقاط قوت کتاب حاضر نسبت به کتاب سال ۱۳۹۴ است. این فصل به سه درس تقسیم شده است (شکل ۶۱).

شکل ۶۱: فصل پنجم: کاربردهای مشتق

کاربردهای مشتق



فصل

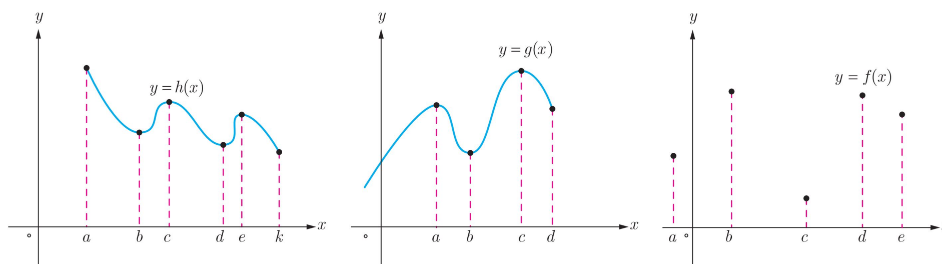
۱ اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی
۲ جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن
۳ رسم نمودار توابع

پس از مقدمه‌ای در خصوص نقاط اکسترمم و تعریف آنها در صفحه ۱۱۲ و ۱۱۳، کار در کلاس صفحه ۱۱۳ (شکل ۶۲) شامل چند نمودار است که دانش آموز باید نقاط اکسترمم نسبی و مطلق را با توجه به نمودار پیدا کند. **اگر چه در صفحه ۱۱۳ به درستی بیان شده است که اکسترمم‌های مطلق در یک بازه (مجموعه) در نظر گرفته می‌شوند، اما در کار در کلاس بیان سوال کامل نبوده و در واقع مشخص نیست دانش آموز باید اکسترمم‌های مطلق را روی کدام بازه پیدا کند.**

شکل ۶۲: کار در کلاس صفحه ۱۱۳

کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را در صورت وجود مشخص نمایید.



در صفحه ۱۱۷ نقاط بحرانی یک تابع تعریف شده است. نکته دیگر این‌که معرفی نقاط بحرانی و کاربرد آنها فقط برای یافتن اکسترمم‌های مطلق در این کتاب آمده است و مطلبی در خصوص یافتن نقاط اکسترمم نسبی و ارتباط آنها با نقاط بحرانی نیامده است. این در حالی است که اگر روش یافتن اکسترمم‌های نسبی با استفاده از نقاط بحرانی بیان شود، بلافاصله می‌توان نقاط اکسترمم مطلق را نیز با بررسی نقاط ابتدا و انتهای بازه مورد نظر به دست آورد.

در موضوع بهینه‌سازی، کتاب حاضر دارای دو مثال در صفحه ۱۱۸ و ۱۱۹ می‌باشد. البته کتاب ریاضی ۳ پایه دوازدهم تجربی دارای یک درس مجزا به نام بهینه‌سازی است که در آن مثال‌ها و تمرین‌های متنوعی از این موضوع آورده شده است.

ارتباط بین مشتق یک تابع با صعودی یا نزولی بودن تابع در قضیه صفحه ۱۲۱ (شکل ۶۳) بیان شده است. فعالیت صفحه ۱۲۰ برای درک رابطه این دو مناسب به نظر می‌رسد. همچنین، کار در کلاس بعدی نیز می‌تواند در فهم این مطلب، که باید برای استفاده از این قضیه ابتدا شرایط آن برقرار باشد، مفید باشد. **هر چند، پیشنهاد می‌کنیم این نکات با استفاده از مثال‌هایی عینی در کتاب گنجانده شود. به عبارت دقیق‌تر، مثالی از یک تابع آورده شود که در یک بازه داده شده مشتق‌پذیر نباشد ولی یکنوا باشد.**

به علاوه، **پیشنهاد می‌شود پس از بیان قضیه، مثال‌هایی در کتاب گنجانده شود که دانش‌آموز با بکار بردن این قضیه، صعودی یا نزولی بودن تابع داده شده روی بازه‌های مختلف را بررسی کند.** مثال صفحه ۱۷۹ کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴ که در شکل ۶۴ آمده است، به دانش آموز کمک می‌کند بکاربردن قضیه فوق را تمرین کند.

شکل ۶۳: قضیه صفحه ۱۲۱

قضیه :

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a , b]$ پیوسته و بر بازه (a , b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت :

الف) اگر به ازای هر x در (a , b)، $f'(x) > ۰$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) < ۰$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a , b)، $f'(x) = ۰$، آن‌گاه تابع f بر $[a , b]$ یک تابع ثابت است.

کار در کلاس

۱ توابع $f(x) = \begin{cases} ۲x & x \geq ۱ \\ x & x < ۱ \end{cases}$ و $g(x) = x^۳$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟

ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

شکل ۶۴: مثال صفحه ۱۷۹ حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴

مثال : مشخص کنید تابع f با ضابطه $f(x)=۲x^۳-۳x^۲-۱۲x+۷$ در کجاها صعودی اکید و در کجاها نزولی اکید است.

حل : ابتدا مشتق تابع را حساب می‌کنیم :

$$f'(x)=۶x^۲-۶x-۱۲=۶(x+۱)(x-۲)$$

عبارت $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم :

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	

از نقطه نظر سطح دشواری مثال‌ها و تمرین‌ها نیز باید گفت کتاب سال ۱۳۹۴ شامل مثال‌هایی به مراتب دشوارتر بود. البته باید در نظر گرفت که در بسیاری از موارد دشواری مثال‌ها ناشی از جامعیت بیشتر محتوای آمده در کتاب مذکور است. به عنوان یک نمونه از همین مبحث، شکل‌های ۶۵ و ۶۶ را ببینید.

شکل ۶۵: مثال صفحه ۱۸۷ کتاب سال ۱۳۹۴

مثال : مقادیر اکسترمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt[۳]{\sin^۲ x}$ را روی بازه $(-\frac{\pi}{۶},\frac{۲\pi}{۳})$ پیدا کنید.

شکل ۶۶: تمرین صفحه ۱۸۸ کتاب سال ۱۳۹۴



مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{۳}x-۲\cos x$ را روی بازه $(۰,۲\pi)$ پیدا کنید.

از دیگر حذفیات مهم در این مبحث، آزمون مشتق دوم (شکل ۶۷) برای یافتن اکسترمم‌های نسبی است. استفاده از این آزمون در برخی موارد به مراتب ساده‌تر از آزمون مشتق اول است. البته همانطورکه پیش‌تر اشاره شد، در این کتاب بیشتر بر اکسترمم‌های مطلق تاکید شده است.

شکل ۶۷: آزمون مشتق دوم در کتاب سال ۱۳۹۴

آزمون مشتق دوم برای اکسترمم‌های موضعی

فرض کنیم $(c,f(c))$ نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که در آن $f'(c)=۰$ و f' به ازای جمیع xهای بازهٔ باز I، شامل c موجود باشد. هرگاه $f''(c)$ وجود داشته و

الف) $f''(c)<۰$، آنگاه f در c ماکسیمم موضعی دارد.

ب) $f''(c)>۰$، آنگاه f در c مینیمم موضعی دارد.

درس دوم این فصل به تقعر منحنی‌ها و نقطه عطف نمودار توابع اختصاص دارد. **به نظر می‌رسد توضیحات ابتدایی درس مناسب است. هر چند پیشنهاد می‌شود تعریف تقعر یک منحنی به صورت مجزا و صریح بیان شود** . شکل ۶۸ راببینید.

شکل ۶۸: تعریف تقعر در صفحه ۱۸۱ کتاب سال ۱۳۹۴

تعریف ۴:

الف) اگر نمودار f روی بازهٔ I بالای همهٔ مماس‌هایش باشد آنگاه نمودار f را **مقعر رو به بالا** می‌نامیم.

ب) اگر نمودار f روی بازهٔ I پایین همهٔ مماس‌هایش باشد، آنگاه نمودار f را **مقعر رو به پایین** می‌نامیم.

دو تابع آمده در فعالیت صفحه ۱۲۸ نیز برای درک جهت تقعر منحنی مناسب هستند. همچنین، مثال بعد از قضیه صفحه ۱۲۹ (شکل ۶۹) نیز از نظر محاسباتی و دشواری به نظر مناسب می‌رسد.

شکل ۶۹: قضیه و مثال صفحه ۱۲۹

قضیه :
فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > 0$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.
ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < 0$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.
پ) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) = 0$، آزمون بی‌نتیجه است.

مثال : جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{1}{x}$

ب) $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

۷.۳ **رسم نمودار توابع** در مورد رسم نمودار توابع که به عنوان آخرین درس از این کتاب آمده است نیز باید گفت سطح مثال‌های حل شده در کتاب حاضر از نظر دشواری به مراتب پایین‌تر از ویرایش سال ۱۳۹۴ است. به عنوان مثال، در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی سال ۱۳۹۴، جدول رفتار و نمودار توابع معکوس مثلثاتی همچون $f(x) = \tan^{-1}(1/x)$ و $g(x) = \sin^{-1}(1/x)$ آورده شده است. همچنین، بررسی جدول رفتار و رسم نمودار توابع گویایی که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای‌های درجه دو و سه هستند نیز گنجانده شده است. هر چند طبق روند کلی که قبلا به آن اشاره شد، می‌توان این موضوع را در مقایسه با کتاب‌های قدیمی‌تر نیز مشاهده کرد. به عنوان مثال، کتاب ”جبر و آنالیز“ سال چهارم دوره متوسطه چاپ ۱۳۶۰، یک فصل کامل را به رسم نمودار توابع اختصاص داده است که در میان انبوه مثال‌های حل شده آن می‌توان رسم نمودار توابع متناوب و توابع مثلثاتی را مثال زد. شکل ۷۰ را ببینید.

شکل ۷۰: رسم نمودار توابع مثلثاتی در کتاب ”جبر و آنالیز“ سال چهارم متوسطه چاپ ۱۳۶۰

مثال۲- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع: $y=\frac{1-\sin x}{2\sin x-1}$ **در فاصلهٔ** $[-\pi, \pi]$

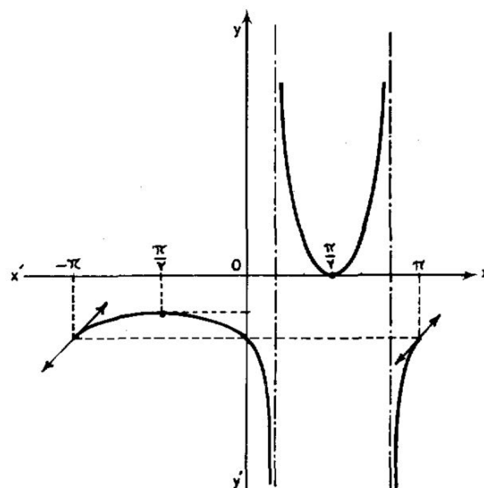
دورهٔ تناوب تابع 2π است. تابع به‌ازای ریشه‌های $\sin x=\frac{1}{2}$ انفصالی است بنابراین $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{6}$ مجانبهای قائم منحنی می‌باشند.

تابع در این فاصله به‌ازای مقادیر $x\neq\frac{\pi}{6}$ و $x\neq\frac{5\pi}{6}$ معین و پیوسته است:

$$y'=\frac{-\cos x}{(2\sin x-1)^2} \quad , \quad y'=0 : \begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \text{ یا } x=-\frac{\pi}{2} \\ y=0 \text{ و } y=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\pi \text{ یا } -\pi \\ y=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x\to\frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6} \\ y\to\pm\infty \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
y'		+	0			−	‖	−	0	+	‖	+	
y	−1	↗	$-\frac{2}{3}$	↘	−1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	−1



۱۴۷

۴. فصل پیشنهادی: انتگرال

باید گفت یکی از بزرگترین انتقاداتی که به ویرایش جدید کتاب وارد است، حذف مبحث انتگرال است. این در حالی است که کتاب سال ۱۳۹۴ در دوره پیش دانشگاهی شامل ۴۰ صفحه محتوا در مورد انتگرال بوده است! کتاب اشاره شده انتگرال را با مطالعه مساحت به عنوان حد مجموع آموزش داده است. آموزش

انتگرال معین و ویژگی‌های ابتدایی آن از مهمترین اهداف کتاب مذکور می‌باشد. به علاوه، قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و همچنین معرفی انتگرال نامعین و برخی فرمول‌های آن نیز در این کتاب آمده است.

با توجه به اینکه دانش آموز در فصل‌های قبلی مفهوم مشتق توابع را فراگرفته است و فرمول‌های مشتق‌گیری را می‌داند، می‌توان مفهوم انتگرال را به عنوان عکس عمل مشتق‌گیری، یعنی همان پاد مشتق و انتگرال نامعین در کتاب گنجاند، بدون آنکه بیمی از زیاد شدن حجم مطالب کتاب داشته باشیم.

در ادامه محتوای مختصری برای این مطلب پیشنهادی ارائه می‌دهیم.

۵. انتگرال

در فصل‌های گذشته با عمل مشتق‌گیری آشنا شدیم. یعنی عملی که ما را از یک تابع مانند f به مشتق آن یعنی f' می‌رساند. در این فصل به دنبال عکس عمل مشتق‌گیری هستیم. فرض کنیم تابع $f(x)$ داده شده باشد. به دنبال تابعی مانند $F(x)$ هستیم به طوری که $F'(x) = f(x)$. اگر چنین تابعی موجود باشد، آنرا یک پادمشتق تابع f می‌نامیم. دقت کنید که اگر $F'(x) = f(x)$، آنگاه برای هر عدد ثابت مانند c نیز داریم $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$. بنابراین اگر $F(x)$ یک پادمشتق $f(x)$ باشد، آنگاه برای هر عدد ثابت مانند c تابع $F(x)+c$ نیز یک پاد مشتق $f(x)$ است.

۱. می‌دانیم مشتق تابع $y = x^2$ برابر است با $y' = 2x$. بنابراین تابع $F(x) = x^2$ یک پاد مشتق تابع $f(x) = 2x$ می باشد. همچنین، برای هر عدد ثابت مانند c، تابع $x^2 + c$ نیز یک پاد مشتق تابع $f(x) = 2x$ می‌باشد.

۲. مشتق تابع $y = \sin x$ برابر است با $y' = \cos x$. بنابراین برای هر عدد ثابت مانند c، تابع $F(x) = \sin x + c$ یک پاد مشتق تابع $f(x) = \cos x$ است.

مجموعه همه پاد مشتق‌های تابع $f(x)$ را انتگرال نامعین f می‌نامیم و با نماد $\int f(x)dx$ نشان می‌دهیم. بنابراین جواب یک انتگرال نامعین دسته‌ای از توابع است که در یک عدد ثابت اختلاف دارند. بنابراین می‌نویسیم

$$\int f(x)\; dx = F(x) + c.$$

در این نمایش، $f(x)$ را انتگرالده و dx را المان انتگرال‌گیری می‌نامیم. المان انتگرال‌گیری نشان می‌دهد که بر حسب چه متغیری انتگرال می‌گیریم. دقت کنید که $F(x)$ یک پاد مشتق دلخواه از تابع f است. به عبارت دیگر، برای یافتن انتگرال نامعین تابع f، کافی است یک پاد مشتق دلخواه از آن را بیابیم.

با استفاده از فرمول مشتق توابع که در فصل های گذشته بیان شده است، فرمول های انتگرال زیر بلافاصله نتیجه می شود:

قضیه ۱.۵.

$$1)\ \int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c;$$
$$2)\ \int \sin x dx = -\cos x + c;$$
$$3)\ \int \cos x dx = \sin x + c.$$

همچنین، با استفاده از خواص مشتق که در صفحه ۹۴ آمده است، خواص زیر برای انتگرال بلافاصله نتیجه می‌شود:

قضیه ۲.۵. *فرض‌کنید $f(x)$ و $g(x)$ دوتابع باشند که دارای انتگرال نامعین هستند و فرض‌کنیم a عددی ثابت باشد. در اینصورت*

$$1)\ \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx,$$
$$2)\ \int a\ f(x)\ dx = a\ \int f(x)\ dx,$$

باید اشاره کنیم که متاسفانه به دلیل اینکه مشتق بسیاری از توابع اساسی در کتاب حاضر حذف شده است، انتگرال نامعین این توابع نیز قابل بیان نیست.

سپاس‌گزاری

این طرح حاصل پژوهشی است که نویسنده در قالب فرصت مطالعاتی در "گروه پژوهشی ریاضی طوسی" در بهار ۱۴۰۰ تحت نظارت آقای دکتر محمد صال مصلحیان گذرانده است. نویسنده از ایشان که پیشنهاد موضوع پژوهش، فراهم آوردن منابع و کتاب‌های مورد بررسی و نظارت بر محتوای پژوهش را بر عهده داشته‌اند، قدردانی می‌نماید. به علاوه، نویسنده از آقای امین روشنی، دبیر ریاضی اداره آموزش و پرورش تبادکان، به واسطه نظرات و پیشنهادات ارزشمند ایشان تشکر و قدردانی می‌نماید.

مراجع

[۱] *حسابان (۱) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه ـ۱۱۱۲۱۴*، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران، چاپ چهارم، ۱۳۹۹.

[۲] *حسابان (۲) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه ـ۱۱۲۲۱۴*، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران، چاپ سوم، ۱۳۹۹.

[۳] *حسابان (کدکتاب ۲۵۸/۱)*، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، چاپ چهارم، ۱۳۹۲.

[۴] *حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره پیش دانشگاهی (کدکتاب ۲۹۵/۱)*، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، چاپ چهارم، ۱۳۹۴.

[۵] *حساب و جبر. سال سوم آموزش متوسطه عمومی رشته ریاضی و فیزیک*، سازمان کتاب های درسی ایران، چاپخانه داورپناه، ۱۳۵۵.

[۶] *جبر و آنالیز. سال چهارم آموزش متوسطه عمومی رشته ریاضی و فیزیک*، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، چاپخانه مطبوعات، ۱۳۶۰.

[۷] *جبر و آنالیز ۱ و ۲، سال چهارم آموزش متوسطه عمومی رشته ریاضی و فیزیک*، سازمان کتاب های درسی ایران، شرکت چاپ آفست گلشن، ۱۳۵۶.

[۸] *ریاضی (۲) - پایه یازدهم دوره دوم متوسطه رشته علوم تجربی ۱۱۱۲۱۱*، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، چاپ اول، ۱۳۹۶.

[۹] *ریاضی (۳) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه رشته علوم تجربی ۱۱۲۲۱۱*، سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران، چاپ سوم، ۱۳۹۹.

[۱۰] ز. تالانی، *تغییرات سه دهه گذشته در نظام آموزشی ایران*، خبرآنلاین https://www.khabaronline.ir/news/۳۴۷۷۲۲.

[۱۱] ق. صادقی، م.ص. مصلحیان، ا. صنمی، ع. مرصعی، م. میرزاوزیری، م. نوغانی دخت بهمنی، م. وثوق، *آموزش مدرسه‌ای، مساله این است*، نشریه ریاضی و جامعه، DOI.10.22108/msci.2021.130621.1470.

[۱۲] م.ص. مصلحیان، *نقدکتابهای دبیرستانی: حسابان ۱ و ۲*، سخنرانی در جمع دبیران ریاضی مشهد،

http : //profsite.um.ac.ir/ ∼ moslehian/Moslehian − Calculus1 − 2.pdf

[۱۳] ل. محمدامین زاده، *بررسی تغییر نظام آموزشی ایران از طرح ۱-۳-۳-۵ به طرح ۳-۳-۶*، کنفرانس بین المللی پژوهش‌های نوین در مدیریت و مهندسی صنایع، تهران، ۱۳۹۴، https://civilica.com/doc/۴۳۵۰۷۳.